未　来　へ　の　架　け　橋

福岡県立高校入試問題を活用した授業改善・学習資料〔数学〕①

本資料の活用の仕方

各問題について、次の A B C のいずれかの内容を解説しています。

- A 基本的な知識
- B 基本的な技能
- C 基本的な考え方

1 関数関係を見いだし表現する力をみる問題

（9） 次のア～エの数量の関係のうち，y が x の2乗に比例するものを1つ選び，記号で答えよ。また，その関係について，y を x の式で表せ。

ア　半径が x cm の円の周の長さを y cm とする。

イ　周の長さが 8 cm の長方形の縦の長さを x cm，横の長さを y cm とする。

ウ　面積が 12 cm² の三角形の底辺の長さを x cm，高さを y cm とする。

エ　底面の1辺の長さが x cm，高さが 6 cm の正四角すいの体積を y cm³ とする。

Point：関数関係を見いだし表現するには！

主な関数には、この問題のように、ア「比例」、ウ「反比例」、イ「一次関数」、エ「２乗に比例する関数」があることを知っておくことが大切です。

ともなって変わる二つの数量 x、y の関係を式に表すと、どのような関数であるかを判断することができます。

比例：$y=ax$	反比例：$y=\dfrac{a}{x}$
一次関数　：$y=ax+b$	２乗に比例する関数：$y=ax^2$

Point：数量の関係を文字を用いた式で表すには！

数量の関係を文字式で表すことができるようになるためには、数量の関係を、具体的な数や言葉を使った式で表したり、**線分図**などで表したりする経験が大切です。この問題の場合、円や三角形などの図形をかいて、辺の長さや高さなどを書き込むことで、数量の関係がとらえやすくなります。

Point：目的に応じて等式を変形するには！

どのような関数であるかを判断しやすくするために、式を y について解きます（「$y=$　」の形にする）。

このような式変形ができるようになるためには、具体的な事象の中の数量の関係を文字を使って等式で表し、指定された文字について解く経験が大切です。

等式の性質を根拠として式を変形することができます。

①～④のどれを用いているかが理解できれば、式変形を形式的に行えるようになります。

〈等式の性質〉

① A＝Bならば、A＋C＝B＋C

② A＝Bならば、A－C＝B－C

③ A＝Bならば、A×C＝B×C

④ A＝Bならば、A÷C＝B÷C　（Cは０ではない）

1 の問題の解き方

事象の中の伴って変わる２つの数量 x、y の関係のうち、$y=ax^2$ の式に表せる関係を見いだし、その関係を式で表すことをつかみます。

関数関係にある２つの数量について、変化や対応の特徴を捉えるために、表、式、グラフを用います。この問題の場合、y を x の式で表すことが求められているので、数量の関係を式で表します。

⇩

ア～エのうち、式の形が $y=ax^2$ となるものが正答になります。

⇩

ア～エの数量の関係を確認します。

↓

ア　(円の周の長さ)
　＝(直径)×(円周率)

イ　(長方形の周の長さ)
　＝2×{(縦の長さ)＋(横の長さ)}

ウ　(三角形の面積)
　＝(底辺)×(高さ)÷2

エ　(錐体の体積)
　＝(底面積)×(高さ)÷3

⇩

ア～エの数量の関係を式に表します。

↓

ア　$y=2\pi x$

イ　$y=-x+4$

ウ　$y=\dfrac{24}{x}$

エ　$y=2x^2$

このことから、正答はエであることがわかります。

2 式の意味を読み取ったり、数量及び数量の関係をとらえ表現したりする力をみる問題

（1） 次のア～カの数のうち，整数 n を用いて 3n＋1 と表されるものをすべて選び，記号で答えよ。

ア　80　　イ　81　　ウ　82　　エ　83　　オ　84　　カ　85

Point：式の意味を読み取るには！

式の意味を読み取ることができるようになるためには、いろいろな数量を文字を用いて式に表したり、表現した式の意味を説明したりする経験が大切です。

（2） 3 と 6，12 と 15 のように，連続する２つの３の倍数において，大きい方の数の２乗から小さい方の数の２乗をひいた差は，もとの２つの数の和の３倍に等しくなることの証明を完成させよ。

（証明）

整数 n を用いると，

（解答例）

連続する２つの３の倍数のうち、小さい方の数は $3n$、大きい方の数は $3n+3$ と表される。

$$
\begin{aligned}
(3n+3)^2-(3n)^2 &= 9n^2+18n+9-9n^2\\
&= 18n+9\\
&= 3(6n+3)\\
&= 3\{3n+(3n+3)\}
\end{aligned}
$$

$3n$、$3n+3$ はもとの２つの数だから、$3\{3n+(3n+3)\}$ は、もとの数の和の３倍である。

したがって，連続する２つの３の倍数において，大きい方の数の２乗から小さい方の数の２乗をひいた差は，もとの２つの数の和の３倍に等しくなる。

Point：事柄が成り立つ理由を説明するには！

具体的な数で式をつくって計算することによって、証明したい事柄を把握することが大切です。

また、ある事柄が一般的に成り立つ理由を説明するために、文字を用いた説明の過程を基に、見通しをもって活動することが大切です。その際、具体的な数でつくった式を基に、文字を用いた式をつくって計算したり、「**○○は…だから、□□は～である。**」という表現を加えたりするなどして、根拠を明らかにした説明にしていきます。

2 の問題の解き方

文字式が表す数量の意味を読み取ることと、文字式を用いて、ある事柄が成り立つことを証明することをつかみます。

（１）では、 $3n$ が３の倍数であることから、$3n+1$ は、３の倍数に１を加えた数であることがわかります。このことから、正答はウ、カであることがわかります。

（２）のように、数の性質が成り立つことを証明するときは、次のような過程で説明します。

①対象となる数を文字を用いて表す。

②証明する事柄について式をつくり計算する。

③②で計算した式を証明する事柄に合うように読み取る。

④結論を書く。

⇩

①連続する２つの３の倍数を n を用いて表します。２つの３の倍数の差は３なので、小さい方の数は $3n$、大きい方の数は $3n+3$ と表すことができます。

⇩

②大きい方の数の２乗から小さい方の数の２乗をひいた式をつくり計算します。

⇩

③計算して得られた式を、もとの２つの数の和の３倍になるように式変形します。

⇩

④式変形した結果が、証明したい事柄に合うことを指摘します。

福岡県立高校入試問題を活用した授業改善・学習資料〔数学〕②

本資料の活用の仕方

各問題について、次の A B C のいずれかの内容を解説しています。

A　基本的な知識
B　基本的な技能
C　基本的な考え方

3 の問題の解き方

相対度数を用いるとよいのはどのような場合であるかを説明することと、ある事柄が正しいことについて、中央値を判断の根拠として説明することをつかみます。

（１）について、「度数の合計が異なる場合」は、各階級の度数をそのまま比べても、資料の傾向は比較しにくいです。このような場合には、各階級の全体に対する割合である相対度数を用います。

（２）のように、ある事柄について判断する場合、代表値を用いて資料の傾向を捉え説明します。その際、根拠とする代表値によって判断が違ってきます。この問題では、中央値を判断の根拠とする場合を考えます。

中央値とは、資料の値を大きさの順に並べたときの中央の値のことです。

度数分布表から、中央値がふくまれる階級を読み取ります。
↓
Ａ中学校は175番目と176番目の値の平均、Ｂ中学校は35番目と36番目の値の平均が、中央値となります。このことから、下線部②で述べていることが正しい理由は、「中央値がふくまれる階級は、Ａ中学校が15冊以上20冊未満で、Ｂ中学校は10冊以上15冊未満であり、中央値はＡ中学校の方がＢ中学校より大きいから」となります。

3　相対度数の必要性の理解及び中央値を用いて資料の傾向を捉え説明する力をみる問題

Ａ中学校とＢ中学校の生徒全員を対象に，6か月間に読んだ本の冊数を調査した。

表１ は，各中学校の調査結果を度数分布表に整理したものであり，**表２** は，各中学校の平均値を示したものである。

下の会話文は，浩さんと花さんが，**表１** と **表２** をもとに，「どちらの中学校の生徒がよく本を読んでいるといえるか」について会話した内容の一部である。

会話文を読んで，次の(１)，(２)に答えよ。

表１

階級（冊）	度数（人）	
	A中学校	B中学校
以上　未満 0 ～ 5	21	5
5 ～ 10	64	11
10 ～ 15	89	23
15 ～ 20	86	12
20 ～ 25	54	11
25 ～ 30	36	5
30 ～ 35	0	0
35 ～ 40	0	0
40 ～ 45	0	0
45 ～ 50	0	3
計	350	70

表２

学校名	A中学校	B中学校
平均値（冊）	15.3	16.0

①各階級の度数ではなく，相対度数を比べるといいよ。たとえば，０冊以上５冊未満の階級については，度数はＡ中学校の方が大きいけれど，相対度数はＢ中学校の方が大きいよ。ただ，ある階級の相対度数を比べるだけで，どちらの中学校の生徒がよく本を読んでいるといえるかはわからないね。

花さん

②中央値を比べると，Ａ中学校の生徒の方がよく本を読んでいるといえるよ。

（１）　下線部①で述べているように，各階級の度数ではなく，相対度数を比べるとよいのはどのような場合か答えよ。

（２）　**表１** において，下線部②で述べていることは正しい。正しい理由を，中央値がふくまれる階級を示して説明せよ。

Point：資料の傾向を捉え、判断の理由を数学的な表現を用いて説明するには！

代表値や資料の分布のようすから資料の傾向を読み取り、判断の根拠を示して説明することが大切です。判断の根拠として多く用いられる代表値は、平均値、中央値、最頻値です。

代表値は、資料の特徴を１つの数値で簡潔に表すことができ、複数の資料を比較することが容易になるというよさがあります。しかし、分布のようすなどの情報が反映できない場合があり、代表値として用いるのはふさわしくない場合があります。

代表値を判断の根拠として説明する際は、資料の特徴に応じた代表値を用いて、簡潔・明瞭・的確に表現することで、論理的に考えをまとめることができます。

4　２つの数量の関係を一次関数として捉え、グラフや式を用いて考察する力をみる問題

図１

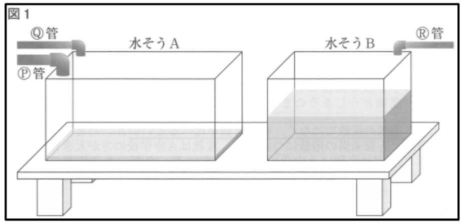
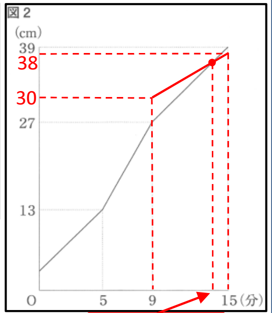


図２



（３）　水そうＢには，底から30 cmの高さまで水が入っている。

水そうＡに水を入れはじめてから９分後に水そうＢに水を入れはじめ，６分間水を入れたところ，水そうＢの底から水面までの高さが38 cmになった。

水そうＡに水を入れはじめて９分後から15分後までの間で，水そうＡと水そうＢの底から水面までの高さが等しくなったのは，水そうＡに水を入れはじめてから何分何秒後か求めよ。

解答は，水そうＡと水そうＢについて，水そうＡに水を入れはじめてからx分後の底から水面までの高さをy cmとし，下の□内の **条件Ⅰ～条件Ⅲ** にしたがってかけ。

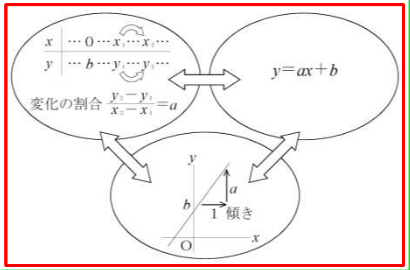
条件Ⅰ　水そうＡと水そうＢのそれぞれについて，$9 \leqq x \leqq 15$ におけるxとyの関係を表す式を，それらの式になる理由もふくめてかくこと。なお，理由は簡潔にかくこと。

条件Ⅱ　**条件Ⅰ** で求めた２つの式を使って答えを求める過程がわかるようにかくこと。

条件Ⅲ　解答欄の□の中には，あてはまる数をかくこと。

Point：数量の関係を、グラフや式を用いて考察するには！

数量の関係を考察する場合、表、式、グラフを用います。その際、**表、式、グラフのうち、どれをどのように用いるのか** を明らかにしておくことが大切です。この問題では、**グラフをかき込む** ことによって、求める値が２つの直線の交点であることがわかり、**式をつくって、それらを連立方程式として解く** ことで、条件に合う値を求めて、正答を導き出します。その際、右の図のように、表、式、グラフを相互に関連付けて、一次関数の特徴を捉えることが大切です。



4 の問題の解き方

連立方程式を使って条件に合う値を導き出す過程を説明することをつかみます。

条件に合う値を求める場合、２つの数量の関係を表した式を使います。

この問題では、水を入れはじめてからの時間と水そうの底から水面までの高さの関係を表した式を使います。

水そうＢについて、水を入れはじめてからの時間と水そうの底から水面までの高さの関係を表したグラフをかき込みます。

２つの直線の交点の x座標が求める値になります。それぞれの水そうについて式をつくり、それらを連立方程式として解いて、交点の座標を求めます。

水そうＡと水そうＢのそれぞれについて、グラフが直線なので、xとyの関係を表す式の形は、$y = ax + b$ になります。

式をつくり、それらを連立方程式として解きます。
↓
<水そうＡ>
傾きが2、点(9, 27)を通るので、$y = 2x + 9$…①
<水そうＢ>
２点(9, 30)、(15, 38)を通るので、$y = \frac{4}{3}x + 18$…②

①、②を連立方程式として解くと、$x = \frac{27}{2}, y = 36$

このことから、正答は、13分30秒後になります。

福岡県立高校入試問題を活用した授業改善・学習資料〔数学〕③

本資料の活用の仕方

各問題について、次の A B C のいずれかの内容を解説しています。

- A 基本的な知識
- B 基本的な技能
- C 基本的な考え方

5 の問題の解き方

図形の性質を使って、２つの三角形が相似であることを証明することと、四角形の面積を導き出すことをつかみます。

（２）のように、証明するときは、仮定と結論が何かを明確にし、問題の条件や図からわかることを、根拠を示しながら見いだしていきます。

仮定と結論を読み取り、問題の条件や図から等しい辺や角を見いだします。

↓

仮定：∠ACB＝∠DBC…①

結論：△OCF∽△EDF

等しい角

∠OFC＝∠EFD(対頂角)…②

∠DBC＝∠FDE(OB＝OD)…③

∠ACB＝∠FDE(①、③より)…④

②、④より、三角形の相似条件の１つである「２組の角がそれぞれ等しい」が成り立ちます。このことから、△ＯＣＦ∽△ＥＤＦがいえます。

（３）の四角形ＯＩＧＨの面積は、△ＢＩＧの面積と△ＢＯＨの面積の差から求められます。

△ＢＩＧ∽△ＢＯＨで、相似比が３：２となるので、

（四角形ＯＩＧＨの面積）

＝△ＢＩＧ－△ＢＯＨ

＝$\frac{5}{9}$△ＢＩＧ

△ＢＩＧの面積を求めるために必要な線分の長さを、三平方の定理等の図形の性質を使って求めます。

正答は、$\frac{15\sqrt{3}}{16}$ になります。

5 平面図形について、命題が成り立つことを証明したり、図形を計量したりする力をみる問題

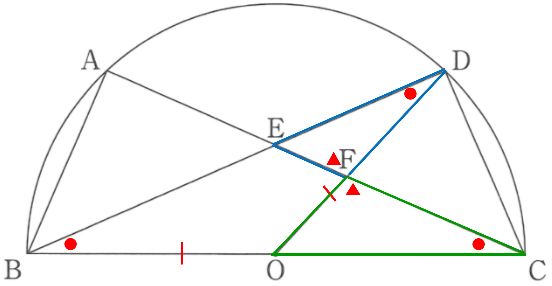
BC＝6cm の△ABCがある。

図１のように，点Ａと異なる点Ｄを，AC＝DB，∠ACB＝∠DBCとなるようにとり，点Bと点D，点Cと点Dをそれぞれ結ぶ。

（２） 図２は，図１において，線分BCの中点をOとし，点A，Dが，線分BCを直径とする半円Oの$\overset{\frown}{BC}$上にある場合を表しており，線分ACと線分BD，ODとの交点をそれぞれE，Fとしたものである。

このとき，△OCF∽△EDFであることを証明せよ。

図２



Point：２つの三角形が相似であることを証明するには！

三角形の相似条件を根拠として用いることが大切です。

２つの三角形は、次の各場合に相似である。

①３組の辺の比がすべて等しい

②２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

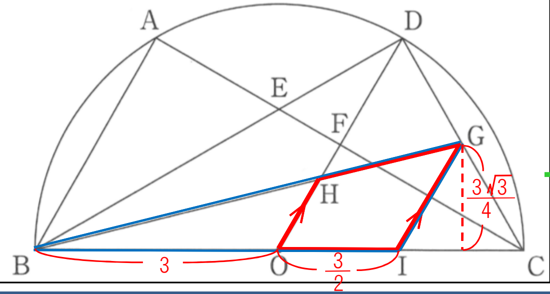
③２組の角がそれぞれ等しい

根拠を明らかにしながら、図に示すように、等しい辺や角に印をつけて、どの相似条件が成り立つかを考えます。

（３） 図３は，図２において，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$となる場合を表しており，線分CDの中点をGとし，線分BGと線分ODとの交点をH，点Gを通り線分ABに平行な直線と線分BCとの交点をＩとしたものである。

このとき，四角形OＩGHの面積を求めよ。

図３



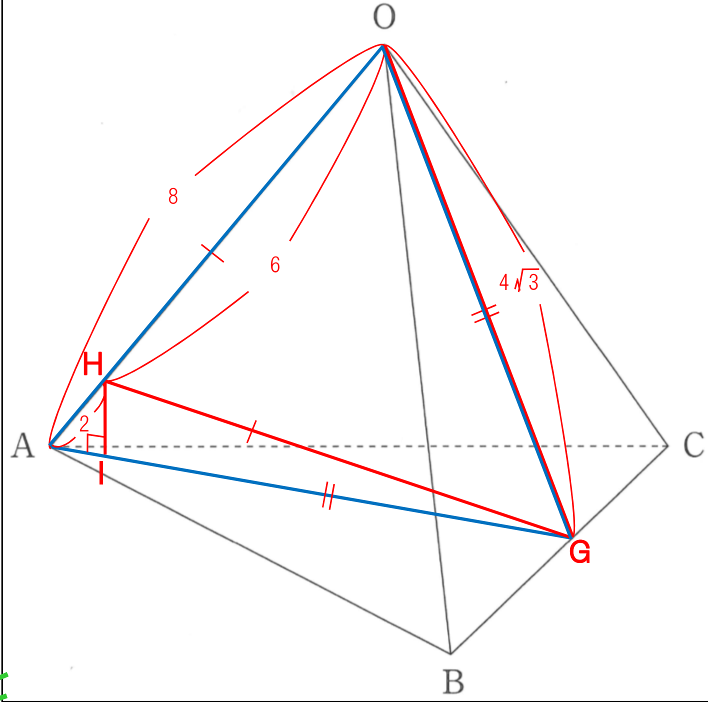
6 空間図形について、多面的に見たり論理的に考えたりして図形を計量する力をみる問題

下の図は，１辺の長さが８cm の正四面体OABCを表している。

（２） 図に示す立体において，

辺BCの中点をGとし，辺OA上に点HをOH＝GHとなるようにとる。点Aと点Gを結び，点Hから線分AGに垂線をひき，線分AGとの交点をＩとする。

このとき，線分HＩの長さを求めよ。



Point：空間図形を平面上に表現し、性質を読み取るには！

見取図、**展開図**、**投影図**を関連付けて空間図形の性質を考察することが大切です。その際、自分で視点を決めて投影図に表して考えたり、展開図に表して考えたりすることが必要です。その理由は、見取図の線分の長さや角の大きさは見た目と違う場合があるからです。

Point：図形の面積や線分の長さを求めるには！

平面図形や空間図形の計量について、多くの場合で使われるのが**三平方の定理**です。直角三角形を見つけたり、補助線をひいて直角三角形をつくりだしたりする経験が大切です。

6 の問題の解き方

空間図形の一部を平面図形として捉え、図形の性質を使って線分の長さを導き出すことをつかみます。

空間図形について考察するとき、その図形の必要な部分を平面上に表現し、図形の性質を読み取ったり、線分の長さを求めたりします。

図に問題の条件に合うように線分をかき込み、図形の性質を使って線分の長さを求めます。

↓

△HGOは、OH＝GHの二等辺三角形なので、∠HOG＝∠HGO

△GOAは、GA＝GOの二等辺三角形なので、∠HOG＝∠GAO

↓

△ＨＧＯ∽△ＧＡＯとなり、

ＯＨ：ＯＧ＝ＯＧ：ＯＡ

このことから、ＯＨ＝6、

ＡＨ＝８－６＝２

△ＡＩＨと△ＨＩＧは、直角三角形であり、ＨＩが２つの三角形の共通な辺であることに着目します。

△ＡＩＨと△ＨＩＧそれぞれにおいて、三平方の定理を使ってHI²を表し、式をつくると、

$AH^2 - AI^2 = GH^2 - GI^2$

となり、このことから、

$AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$HI^2 = AH^2 - AI^2$ だから、

答えは、$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ になります。