

まずは自分で問題を解いてから、下の解説を読みましょう（問題の内容を学習する学年も示していますので、中学1・2年生は該当学年の問題を解いてみましょう）。

解説には、 内に**解決する際のポイント**を示していますので、参考にして再挑戦してみましょう！

1

やや難

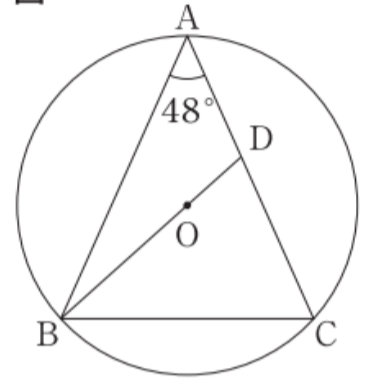
(6) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域を求めよ。

難

(9) 図のように、円Oの円周上に3点A, B, Cを、 $AB = AC$ となるようにとり、 $\triangle ABC$ をつくる。線分BOを延長した直線と線分ACとの交点をDとする。

$\angle BAC = 48^\circ$ のとき、 $\angle ADB$ の大きさを求めよ。

図



どちらも3年生で学習する内容です。

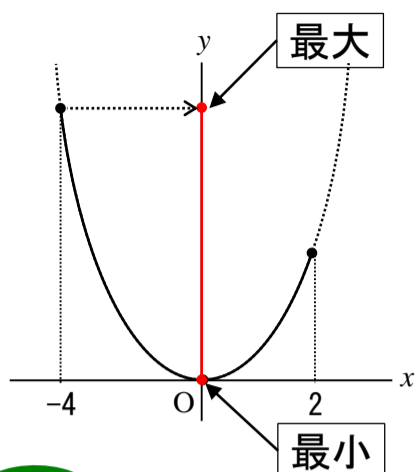
解答・解説は次ページ





ポイント

(6) x の値が最大, 最小となるときに, y の値もそれぞれ最大, 最小とならない場合があるので, グラフをかいて, y の値の変化の様子を調べよう。



$y = \frac{1}{2} x^2$ ($-4 \leq x \leq 2$) のグラフは, 左図のようになる。

左図から, $x = -4$ のとき, y の値は最大となり,

$x = 0$ のとき, y の値は最小となる。

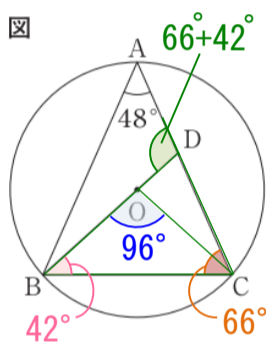
式 $y = \frac{1}{2} x^2$ に $x = -4$ を代入して, $y = 8$

$x = 0$ を代入して, $y = 0$

したがって, (答) $0 \leq y \leq 8$

ポイント

(9) このままの図形だと円周角の定理などが使えないので, それが使えように,
 ・点O (円の中心) と円周上の点を結び, 1つの弧に対する円周角と中心角をつくろう。
 ・半径を延長するなどして直径をひき, 半円の弧に対する円周角 (90°) をつくろう。

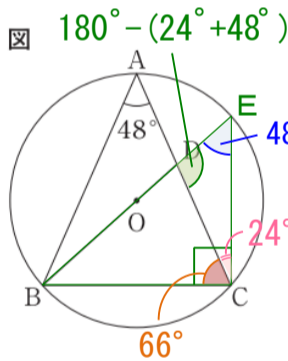


(例1) 点Oと点Cを結ぶ。

$\triangle ABC$ は, $AB = AC$ の二等辺三角形だから, $\angle ACB = (180^\circ - 48^\circ) \div 2 = 66^\circ$
 1つの弧に対する中心角の大きさは, その弧に対する円周角の大きさの2倍だから,
 $\angle BOC = 2 \angle BAC = 2 \times 48^\circ = 96^\circ$

$\triangle OBC$ は, $OB = OC$ の二等辺三角形だから, $\angle OBC = (180^\circ - 96^\circ) \div 2 = 42^\circ$
 三角形の外角は, その隣にない2つの内角の和に等しいから, $\triangle DBC$ において,

$$\angle ADB = \angle DCB + \angle DBC = 66^\circ + 42^\circ = \text{(答) } 108^\circ$$



(例2) 線分BDを延長した直線と円周との交点をEとし, 点Cと点Eを結ぶ。

線分BEは円Oの直径であり, 半円の弧に対する円周角は直角だから, $\angle BCE = 90^\circ$

(例1) と同様に $\angle ACB = 66^\circ$ だから, $\angle ACE = \angle BCE - \angle ACB = 24^\circ$

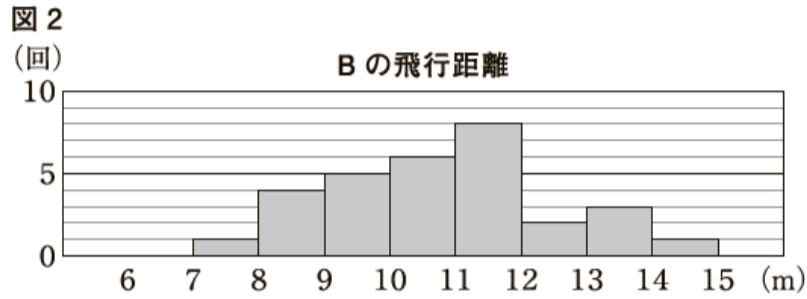
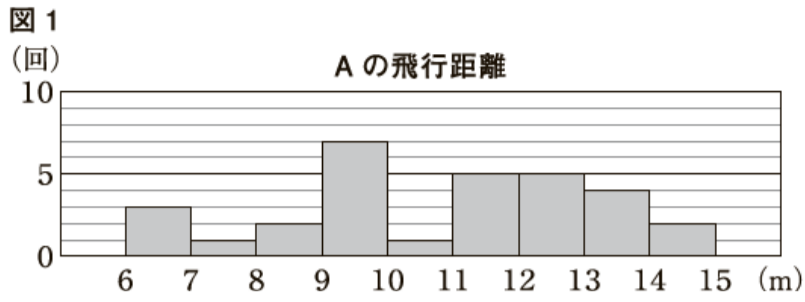
\widehat{BC} に対する円周角は等しいから, $\angle BEC = \angle BAC = 48^\circ$

これらから, $\triangle DCE$ において, $\angle EDC = 180^\circ - (24^\circ + 48^\circ) = 108^\circ$

対頂角は等しいから, $\angle ADB = \angle EDC = \text{(答) } 108^\circ$

2

紙飛行機の飛行距離を競う大会が行われる。この大会に向けて、折り方が異なる2つの紙飛行機A, Bをつくり、飛行距離を調べる実験をそれぞれ30回行った。図1, 図2は、実験の結果をヒストグラムにまとめたものである。例えば、図1において、Aの飛行距離が6 m以上7 m未満の回数は3回であることを表している。



1年生で学習する内容です。

- やや難** (2) 図1, 図2において、AとBの飛行距離の平均値が等しかったので、飛行距離の中央値と飛行距離の最頻値のどちらかを用いて（どちらを用いてもかまわない。）、この大会でより長い飛行距離が出そうな紙飛行機を選ぶ。
- このとき、AとBのどちらを選ぶか説明せよ。
- 説明する際は、中央値を用いる場合は中央値がふくまれる階級を示し、最頻値を用いる場合はその数値を示すこと。

解答・解説は次ページ





○飛行距離の中央値を用いる場合

○飛行距離の最頻値を用いる場合

ポイント

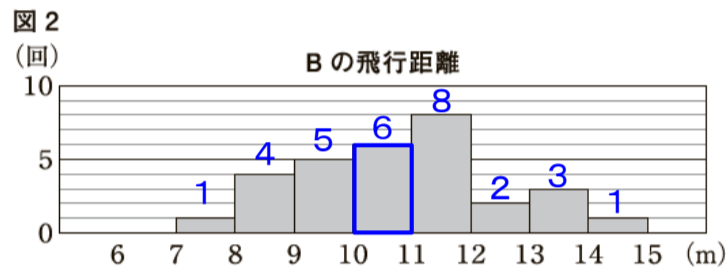
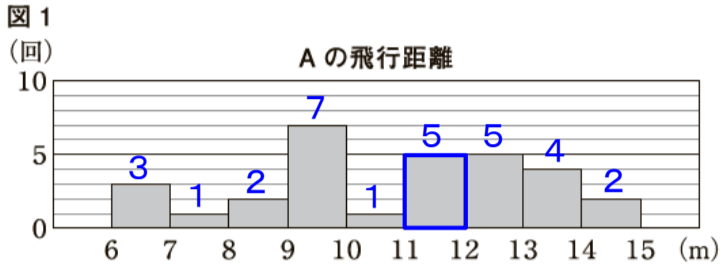
中央値とは、度数の合計が偶数の場合は、大きさの順に並べたときの中央の2つの値の平均値。

ポイント

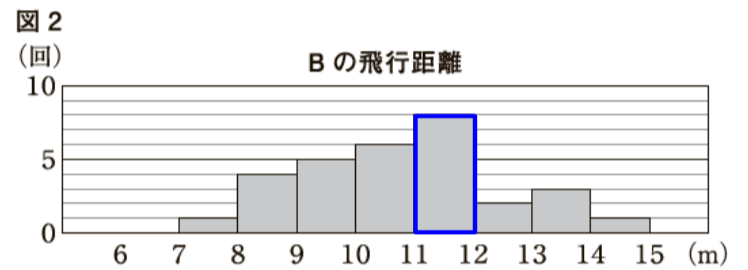
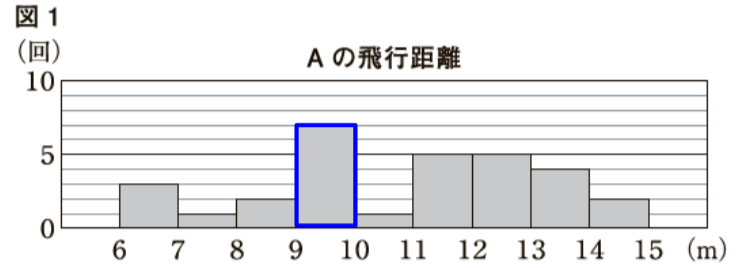
最頻値とは、ヒストグラムで度数が最も多い階級の階級値（階級の真ん中の値）。

↓
 度数の合計が30回だから、15、16番目の値が
 入る階級を調べる。

↓
 Aは7回、Bは8回が最も多い度数なので、そ
 れぞれの階級の階級値を求める。



中央値が入る階級は、ヒストグラムから
 Aは、11m以上12m未満
 Bは、10m以上11m未満



最頻値は、ヒストグラムから
 Aは、 $(9+10) \div 2 = 9.5\text{m}$
 Bは、 $(11+12) \div 2 = 11.5\text{m}$

(答) (例) 飛行距離の中央値が入る階級は、Aが11m以上12m未満で、Bが10m以上11m未満であり、中央値はAの方がBより大きいので、Aを選ぶ。

(答) (例) 飛行距離の最頻値は、Aが9.5mで、Bが11.5mであり、最頻値はBの方がAより大きいので、Bを選ぶ。

3

孝さんと桜さんは、連続する2つの偶数の積に1を加えた数がどのような数になるか次のように調べた。

調べたこと

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2 \\ 4 \times 6 + 1 = 25 = 5^2 \\ 6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2 \end{array} \right\} \text{ 全て奇数の2乗になっている。}$$

調べたことから、次のように予想した。

予想

連続する2つの偶数の積に1を加えた数は、奇数の2乗になる。

難

(3) 次に、孝さんと桜さんは、連続する5つの整数のうち、異なる2つの数の積に1以外の自然数を加えた数が、整数の2乗になる場合を調べてまとめた。

まとめ

連続する5つの整数のうち、
(X)と(Y)の積に(P)を加えた数は、(Z)の2乗になる。

上のまとめはいつでも成り立つ。(X)、(Y)、(Z)にあてはまるものを、次のア～オからそれぞれ1つ選び、記号をかけ。また、(P)にあてはまる1以外の自然数を答えよ。

- ア 最も小さい数
- イ 2番目に小さい数
- ウ 真ん中の数
- エ 2番目に大きい数
- オ 最も大きい数

3年生で学習する内容です。



解答・解説は次ページ





連続する5つの整数は、整数 n を用いて、 $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ と表される。この5つの数のうち、 $(X), (Y)$ にあてはまる2つの数の組は左の10通り。

X	Y
n	$n+1$
	$n+2$
	$n+3$
	$n+4$
$n+1$	$n+2$
	$n+3$
	$n+4$
$n+2$	$n+3$
	$n+4$
$n+3$	$n+4$

ポイント 2つの数の積を式に表し、その式にどのような自然数を加えれば、 $(整数)^2$ の形に因数分解できるかを考えよう。

X が n, Y が $n+1$ の場合、2つの数の積は、 $n(n+1) = n^2 + n$ である。 $n^2 + n$ は n の係数が1なので、どのような自然数を加えても、 $(整数)^2$ の形に因数分解することはできない。

ポイント $(整数)^2$ の形に因数分解できる式の形は、 n の係数が2の倍数で、定数が整数の2乗のときである。よって、左の10通りについて、 n の係数が2の倍数になる場合のみ取り出して考えよう。

$$\begin{aligned} n^2 + 2n + 1 &= (n+1)^2 \\ n^2 + 4n + 4 &= (n+2)^2 \\ n^2 + 6n + 9 &= (n+3)^2 \\ &\vdots \\ n^2 + 2an + a^2 &= (n+a)^2 \end{aligned}$$

上の10通りのうち、 n の係数が2の倍数になるのは、 $n(n+2), n(n+4), (n+1)(n+3), (n+2)(n+4)$ の4通りである。この4通りについて、 n の係数と定数に着目し、2つの数の積に自然数を加えて整数の2乗になるように因数分解する。

- ① $n(n+2) = n^2 + 2n$ ← n の係数が2、定数が0だから
 $\Rightarrow n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ 1 を加えると、 $(n+1)^2$ になる。
- ② $n(n+4) = n^2 + 4n$ ← n の係数が4、定数が0だから
 $\Rightarrow n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$ 4 を加えると、 $(n+2)^2$ になる。
- ③ $(n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3$ ← n の係数が4、定数が3だから
 $\Rightarrow n^2 + 4n + 3 + 1 = (n+2)^2$ 1 を加えると、 $(n+2)^2$ になる。
- ④ $(n+2)(n+4) = n^2 + 6n + 8$ ← n の係数が6、定数が8だから
 $\Rightarrow n^2 + 6n + 8 + 1 = (n+3)^2$ 1 を加えると、 $(n+3)^2$ になる。

上の計算結果から、1以外の自然数を加えて整数の2乗になるのは、②の場合である。

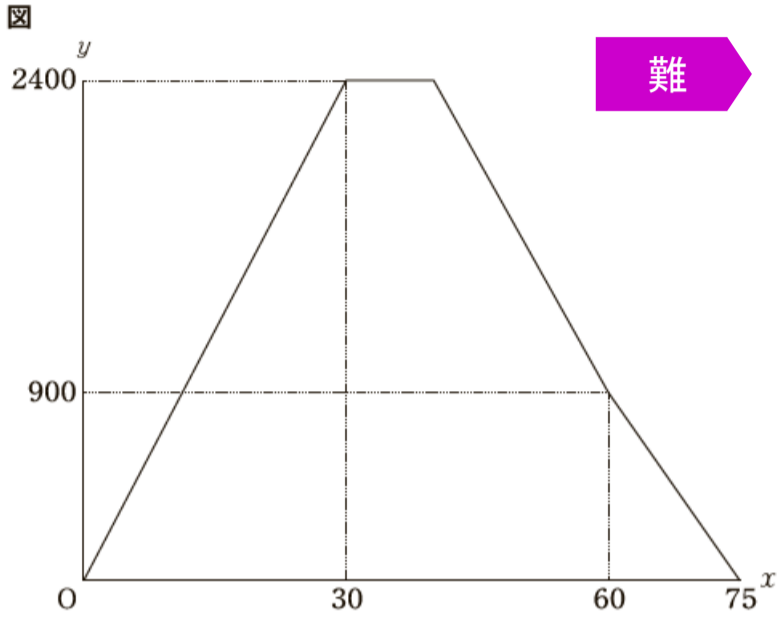
したがって、**(ア：最も小さい数)**と**(オ：最も大きい数)**の積に**(4)**を加えた数は、**(ウ：真ん中の数)**の2乗になる。

4

希さんの家，駅，図書館が，この順に一直線の道路沿いにあり，家から駅までは900m，家から図書館までは2400m離れている。

希さんは，9時に家を出発し，この道路を図書館に向かって一定の速さで30分間歩き図書館に着いた。図書館で本を借りた後，この道路を図書館から駅まで分速75mで歩き，駅から家まで一定の速さで15分間歩いたところ，10時15分に家に着いた。

図は，9時から x 分後に希さんが家から y m 離れているとすると，9時から10時15分までの x と y の関係をグラフに表したものである。



難

(3) 希さんの兄は，10時5分に家を出発し，この道路を駅に向かって一定の速さで走り，その途中で希さんとすれちがい，駅に着いた。希さんの兄は，駅で友達と話し，駅に着いてから15分後に駅を出発し，この道路を家に向かって，家から駅まで走った速さと同じ一定の速さで走ったところ，10時38分に家に着いた。

希さんの兄と希さんがすれちがったのは，10時何分何秒か求めよ。

2年生で学習する内容です。



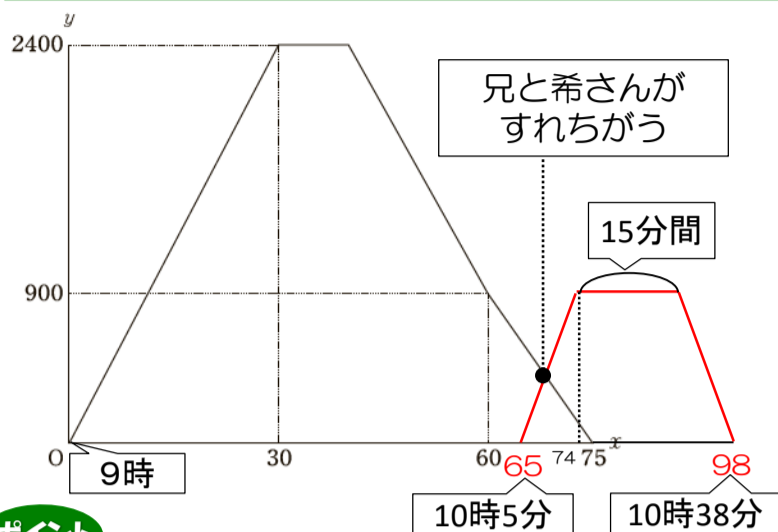
解答・解説は次ページ





ポイント

兄と希さんについての時間と距離の関係を明らかにするため、兄が走った時間と距離の関係を図にかき入れ、兄が走った速さを求めよう。



兄は10時5分に家を出発し、駅に15分間滞在し、10時38分に再び家に着いたので、そのグラフは、左図のようになる。

兄が走った時間は、 $98 - 65 - 15 = 18$ 分間であり、兄は家から駅までを同じ速さで往復しているから、分速は、 $900 \times 2 \div 18 = 100\text{m}$ である。

ポイント

兄と希さんがすれちがった時刻は、上の図の2直線の交点の x 座標なので、この2直線それぞれの式を求め、それらを連立方程式として解こう。

$60 \leq x \leq 75$ における希さんについてのグラフは、2点 $(60, 900)$ 、 $(75, 0)$ を通る直線なので、式は、 $y = -60x + 4500$ …①

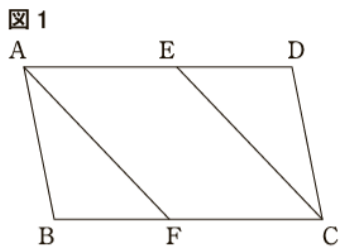
また、兄は10時5分に家を出発し、分速100mで駅まで走っているから、 $65 \leq x \leq 74$ における兄についてのグラフは、点 $(65, 0)$ を通り、傾き100なので、式は、 $y = 100x - 6500$ …② となる。

①、②を連立方程式として解くと、 $x = \frac{275}{4} = 68\frac{3}{4}$ 、 $y = 375$

よって、兄と希さんがすれ違ったのは10時 $8\frac{3}{4}$ 分。 $\frac{3}{4}$ 分を秒に直すと、 $\frac{3}{4} \times 60 = 45$ 秒

したがって、求める時刻は、**(答) 10時8分45秒**

5 平行四辺形 $ABCD$ がある。
 図1のように、線分 AD, BC 上に、点 E, F を、 $DE = BF$ となるようにそれぞれとり、点 A と点 F 、点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。
 このとき、四角形 $AFC E$ は平行四辺形である。



やや
難

(1) 次は、図1における「四角形 $AFC E$ は平行四辺形である」ことの証明である。

証明

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから
 ア $\underline{AE \parallel CF}$. . . ①
 イ $\underline{AD = CB}$. . . ②
 仮定から、ウ $\underline{DE = BF}$. . . ③
 ②, ③より、エ $\underline{AD - DE = CB - BF}$
 よって、オ $\underline{AE = CF}$. . . ④
 ①, ④より、カ 1組の向かいあう辺が平行でその長さが等しいので
 四角形 $AFC E$ は平行四辺形である。

難

図2は、図1における点 E, F を、線分 AD, CB を延長した直線上に $DE = BF$ となるようにそれぞれとったものである。

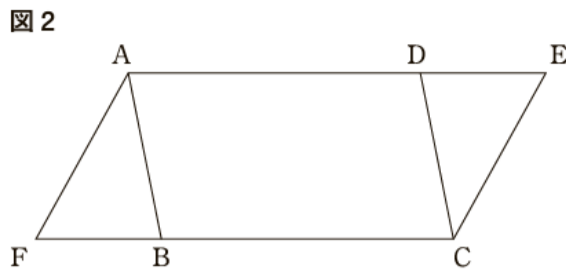
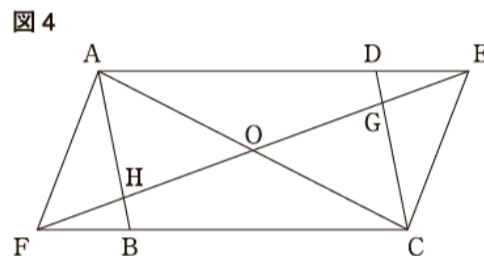


図2においても、四角形 $AFC E$ は平行四辺形である。このことは、上の証明の下線部ア～カのうち、いずれか1つをかき直すことで証明することができる。
 上の証明を、図2における「四角形 $AFC E$ は平行四辺形である」ことの証明とするには、どの下線部をかき直せばよいか。ア～カから1つを選び、記号をかき、その下線部を正しくかき直せ。

(3) 図4は、図3において、 $AD : DE = 3 : 1$ となる場合を表しており、対角線 EF と対角線 AC との交点を O としたものである。

平行四辺形 $AFC E$ の面積が 12 cm^2 のとき、四角形 $HBCO$ の面積を求めよ。



どちらも2年生で学習する内容です。

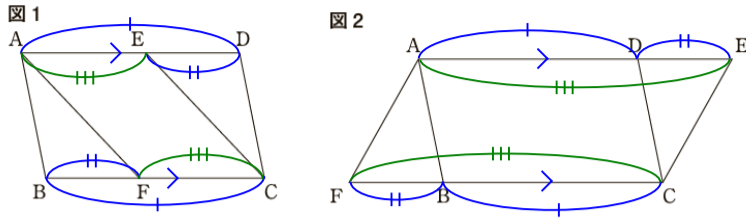
解答・解説は次ページ





ポイント

(1) 点のとりかたを、図1から図2のようにしたとき、平行四辺形の辺や角の関係について、「変化しないこと」と「変化すること」を整理し、証明を見直そう。

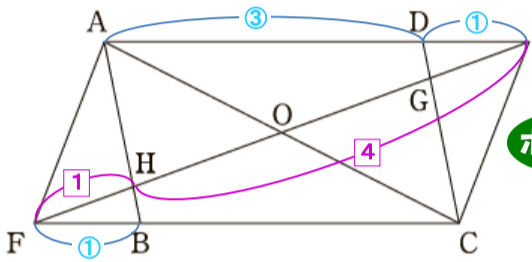


変化しないこと	変化すること
AE//CF AD=CB DE=BF	次の線分の長さの関係 図1 : AE=AD-DE, CF=CB-BF 図2 : AE=AD+DE, CF=CB+BF

整理したことから、証明のア～ウは、かき直さずに、**エをAD+DE=CB+BFとかき直す** と、証明のオ、カも成り立ち、図2における「四角形AFCEは平行四辺形である」ことの証明が完成する。

ポイント

(3) 四角形HBCOは面積の公式を使える形ではなく、また、辺の比と平行四辺形AFCEの面積しかわからないので、それが使えるように、四角形HBCO=△OFC-△HFBとして面積を求めよう。



△OFCの面積を求める。点Oは平行四辺形AFCEの対角線の交点だから、
△OFC=平行四辺形AFCE÷4=12÷4=3 cm²

ポイント

△HFBと相似な三角形を見つけ「相似な図形の面積比は、相似比の2乗に等しい」ことなどを用いて、△HFBの面積を求めよう。

△HFB∽△HEA〔∠FHB=∠EHA (対頂角)
∠BFH=∠AEH (平行線の錯角は等しい)
⇒2組の角がそれぞれ等しい〕より、
HF : HE=FB : EA=DE : EA=1 : 4
△HEA= $\frac{4}{5}$ △AFE
= $\frac{4}{5} \times (\frac{1}{2} \times \text{平行四辺形AFCE})$
= $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 12 = \frac{24}{5}$

相似な図形の面積比は、相似比の2乗に等しいので、
△HFB : △HEA=1² : 4²=1 : 16
よって、△HFB= $\frac{1}{16}$ △HEA
= $\frac{1}{16} \times \frac{24}{5} = \frac{3}{10}$
したがって、四角形HBCO=△OFC-△HFB
= $3 - \frac{3}{10}$
= **(答) $\frac{27}{10}$ cm²**

6

図1は、正四角すいと直方体をあわせた形で、点A, B, C, D, E, F, G, H, Iを頂点とする立体を表している。BC=6cm, BF=5cmである。

図2は、図1に示す立体において、辺BF上に点Pを、BP=2cmとなるようにとり、

難

難

(3) 図2に示す立体において、四面体PHECの体積を求めよ。

図1

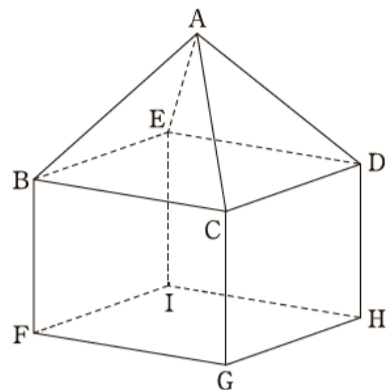
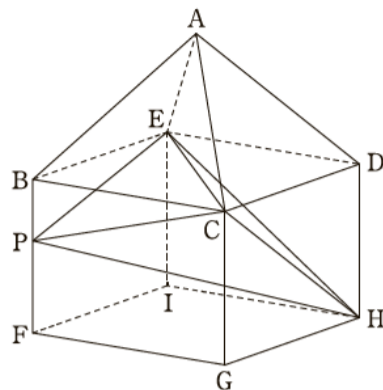


図2



(2) 図1に示す立体において、辺AD, AE上にそれぞれ点J, Kを、AJ:JD=1:2, AK:KE=1:2となるようにとり。点Jから辺FGに垂線をひき、辺FGとの交点をLとする。

四角形KFGJの面積が $16\sqrt{5}\text{cm}^2$ のとき、線分JLの長さを求めよ。

(2)は3年生で、(3)は1年生で学習する内容です。



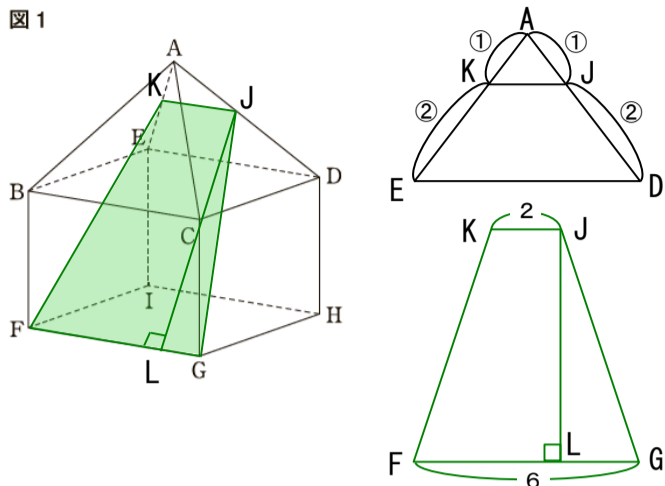
解答・解説は次ページ





ポイント
 (2) 四角形KFGJがどのような四角形になるのかを、平行線と線分の比の関係や基本的な図形の性質をもとに明らかにしよう。

図1



△AEDにおいて、

$AK : KE = 1 : 2$, $AJ : JD = 1 : 2$ より、

$AK : KE = AJ : JD$ なので、 $KJ // ED$ …①

また、直方体BCDEFGHIより、 $ED // FG$ …②

①, ②より、 $KJ // FG$

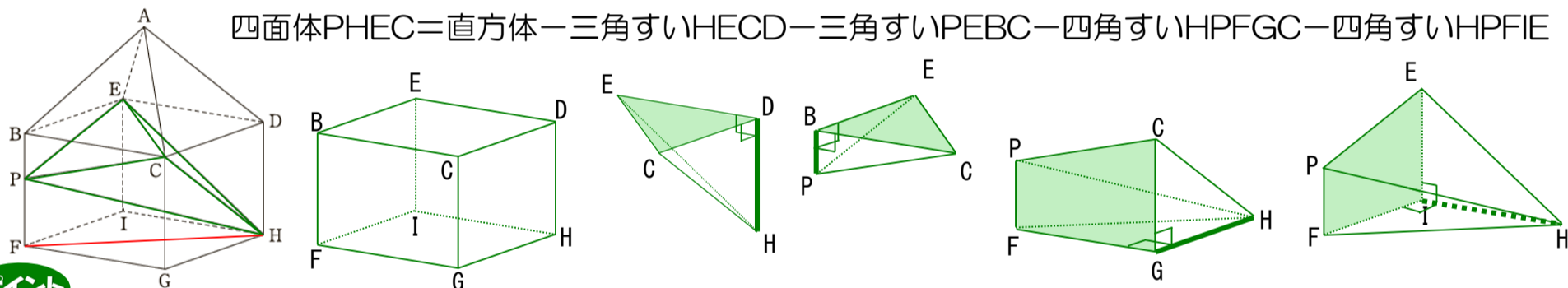
したがって、四角形KFGJは台形である。

△AEDにおいて、 $AK : AE = KJ : ED$ より、
 $1 : 3 = KJ : 6$
 $KJ = 2$

よって、台形KFGJの面積は、
 $(2 + 6) \times JL \div 2 = 16\sqrt{5}$ より
 $JL =$ (答) $4\sqrt{5} \text{ cm}$

ポイント
 (3) 四面体PHECはどの面を底面としてもそれに対する高さを求めるのが難しいので、体積の公式を使うことができるように補助線をひき、立体をいくつかに分けて考えよう。

補助線FHをひき、四面体PHEC = 直方体 - 四面体PHEC以外の立体 (2つの三角すいと2つの四角すい) として体積を求める。



四面体PHEC = 直方体 - 三角すいHECD - 三角すいPEBC - 四角すいHPFGC - 四角すいHPFIE

ポイント
 4つの角すいは、色を付けた面を底面、太い線を高さとみて、それぞれの体積を求めよう。

三角すいHECD = $\triangle ECD \times DH \div 3 = (6 \times 6 \div 2) \times 5 \div 3 = 30 \text{ cm}^3$

三角すいPEBC = $\triangle EBC \times BP \div 3 = (6 \times 6 \div 2) \times 2 \div 3 = 12 \text{ cm}^3$

四角すいHPFGC = 台形PFGC $\times GH \div 3 = \{ (3 + 5) \times 6 \div 2 \} \times 6 \div 3 = 48 \text{ cm}^3$

四角すいHPFIE = 台形PFIE $\times IH \div 3 = \{ (3 + 5) \times 6 \div 2 \} \times 6 \div 3 = 48 \text{ cm}^3$

よって、四面体PHEC = 直方体 - (4つの角すい) = $6 \times 6 \times 5 - (30 + 12 + 48 + 48) =$ (答) 42 cm^3