

論理的に表現し、数学への素地を培う子供を育てる算数科学習指導

省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を通して

朝倉市立杷木小学校
教諭 松尾 雄真

こんな手立てによって…

- ①「目的性」「条件性」「接続性」の特性を内包した問題設定
- ②表現モデルの活用
- ③段階的な活動設定

こんな成果があった！

省察化を促す数学的コミュニケーション活動が促進され、中学数学へ繋がる論理的に表現する力の素地を培う子供の姿が見られた。

1 考えた

全国学力・学習状況調査では、福岡県の小中学生とも「数学的な表現を用いた説明」に課題が見受けられた。本学級の児童 35 名においても、標準学力調査の結果から同様の課題が指摘され、この課題を解決するための授業改善が求められる。この現状を研究の発端とし、小学校算数科において、論理的に表現する力の素地を段階的に育成することを目指し、小・中の接続を円滑に進める、統合的な考えの積み重ねを図った、具体的には、数学的コミュニケーション活動に、省察化の機能を促進させる工夫を設けた授業改善の在り方を追究し、「論理的に表現し、数学への素地を培う子供を育む」研究を行った。

2 やって見た

本研究では、「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」を育てるために、「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」を行った。具体的には、「3つの特性を内包した問題設定」「表現モデルの活用」「段階的な活動設定」の3つの手立てを設け、検証授業ⅠⅡにおいて、その手立ての有効性を検証した。【検証授業Ⅰ】第6学年単元「円の面積」では、正方形に内接する円の面積が同じになる理由を考察し、そのことを数学的な表現に関連付けて表現する上で有効であったかを、【検証授業Ⅱ】第6学年単元「資料の調べ方」では、自分が選んだ紙飛行機が有利であると判断した理由を、データを批判的に考察する中で、自分の考えを数学的な表現に関連付けて表現する上で有効であったかを検証した。

3 成果があった！

「3つの特性を内包した問題設定」「表現モデルの活用」「段階的な活動設定」の3つの工夫を行った「省察化を促す数学的コミュニケーション活動」を位置づけた授業展開をすることで、省察化を促す数学的コミュニケーション活動が促進され、中学数学へ繋がる統合的な考えの積み重ねを図ることができ、「論理的に表現し、数学への素地を培った子供」の姿が見られた。

<目次>

論理的に表現し、数学への素地を培う子供を育てる算数科学習指導

省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を通して

1	主題設定の理由	3
	(1) 社会的要請から	3
	(2) 福岡県の算数・数学の課題から	3
	(3) 児童の実態から	4
2	主題の意味	4
	(1) 論理的に表現するとは	4
	(2) 数学への素地を培うとは	5
	(3) 論理的に表現し、数学への素地を培う子供とは	6
3	副主題の意味	6
	(1) 省察化とは	6
	(2) 数学的コミュニケーションとは	7
	(3) 省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫とは	7
4	研究の構想	7
	(1) 3つの特性を内包した問題設定	7
	(2) 表現モデルの活用	9
	(3) 活動構成	10
	(4) 論理的に表現し、数学への素地を培う子供の見取りについて	11
5	研究の目標	11
6	研究の仮説	11
7	研究の実際	12
	(1) 検証授業Ⅰ 第6学年「円の面積」第8時	12
	(2) 検証授業Ⅱ 第6学年「資料の調べ方」第9時	18
	(3) 全体考察	23
8	成果と課題	25
	<参考文献>	25

論理的に表現し、数学への素地を培う子供を育てる算数科学習指導

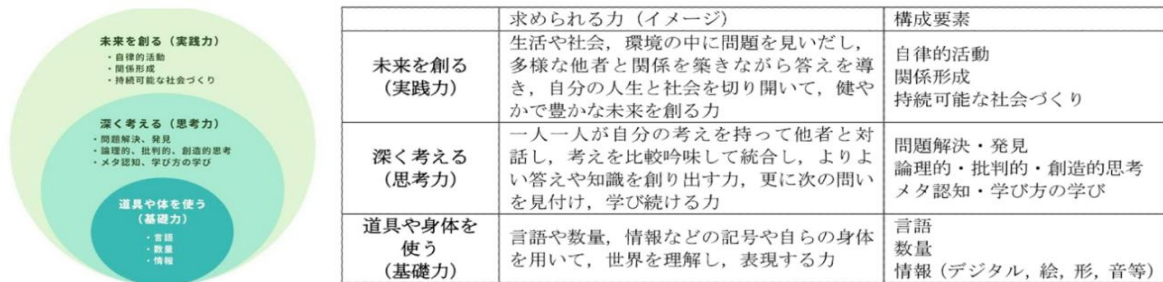
省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を通して

朝倉市立杷木小学校
教諭 松尾 雄真

1 主題設定の理由

(1) 社会的要請から

中央教育審議会教育課程企画特別部会における「論点整理」において、将来の変化が激しく、予測が困難な 21 世紀の社会では、社会の変化に主体的に向き合って関わり合い、子供一人一人が、自らの可能性を最大限に発揮し、よりよい社会と幸福な人生を自ら創り出していくことが重要であると述べられている。これを受け、国立教育政策研究所は「21 世紀型能力」として、学校教育で育成する資質・能力を【資料 1】のように示した。



【資料 1：21 世紀に求められている資質・能力の構造及び内容】

また「教育課程部会算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」において、事象を数学的な表現を用いて論理的に説明したり、よりよい考えや事柄の本質について話し合い、よりよい考えを高めたり、事柄の本質を明らかにしたりするなどの「対話的な学び」を実現することが求められている。具体的には、算数科では数学的な表現を用いて説明することで、簡潔・明瞭・的確に自分の考えを表現する活動を設けることや、自分の表現を教室全体で数学的に洗練することにより、客観的で合理的な説明に高め合う活動を設けることが重要であると述べられている。これらのことから、数学的コミュニケーションを取り入れた授業づくりを行うことはこれからの資質・能力の育成の一端を担う上で重要であると考えられる。

(2) 福岡県の算数・数学の課題から

学習指導要領（数学編）において、中学数学の課題として取り上げられているのが「数学的な表現を用いた理由の説明」である。令和 3 年度全国学力・学習状況調査 福岡県調査報告書によると、本県の中学生でも以下に示したように、同様な課題が見られ、この課題を解決するための更なる授業改善が求められている。

◆ 事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明できること	福岡県 29.5% 全国 27.7%
◆ データの傾向を的確に捉え、判断の理由を数学的な表現を用いて説明することができること	福岡県 13.9% 全国 11.1%
◆ ある条件の下で、いつでも成り立つ図形の性質を見出し、それを数学的に表現することができること	福岡県 28.6% 全国 28.8%
※ 数値は平均正答率を示している。	

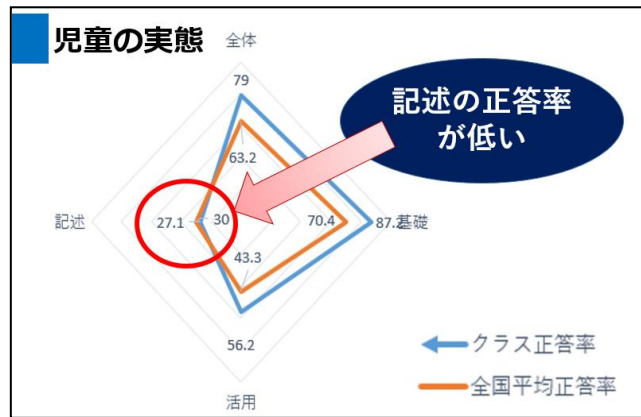
また、小学校算数科においても中学校同様、記述における「数学的な表現を用いた説明」に課題があることが、下記の令和3年度全国学力・学習状況調査 福岡県調査報告書（算数科の課題）から明らかになった。

- ◆ 複数の図形を組み合わせた平行四辺形について、図形を構成する要素などに着目し、図形の構成の仕方を捉えて、面積の求め方と答えを記述できること 福岡県 44.1% 全国 46.0%
 - ◆ 帯グラフで表された複数のデータを比較し、示された特徴をもった項目とその割合を記述できること 福岡県 51.8% 全国 52.0%
 - ◆ 小数を用いた倍についての説明を解釈し、ほかの数値の場合に適用して、基準量を1としたときに比較量が示された小数に当たる理由を記述できること 福岡県 54.8% 全国 51.5%
- ※ 数値は平均正答率を示している。

このことから、小・中で共通した課題である「数学的な表現を用いた説明」を改善するためには、小学校段階で数学的な表現を用いて、自分の考えを表現する力を育む授業を展開していくことが大切であり、このことは、小・中の接続を円滑に進める上でも意義深い。

(3) 児童の実態から

本学級の児童 35 名の令和 3 年度標準学力調査（1 月実施）算数科における、学力の実態は、【資料 2】に示す通りである。「基礎」「活用」「記述」の観点から分析すると、「記述」の観点から分析すると、「記述」の観点から分析すると、他の観点より大きく達成率が下回っており、全国平均正答率と比較しても 2.9% 下回っている。このことから、子供たちが、自分はもちろん、他者が納得することができるように、数学的な表現を用いて論理的に説明することに困難さを持っていることがわかった。この結果を、算数科の授業における子供たちの関わり合いから分析すると、子供たちが数学的な表現を用いた説明ができない背景には、①答えの出し合いで終わっている。②一方的にノートに書いていることを読むだけに留まっている。この 2 つの課題が明らかになった。つまり、相手に自分の考えを納得させるために、考えを比較して関連づけたり、自分の考えを練り上げたりするまで至っていないのが本学級の現状である。このことは、自分の考えを表現する目的が明確でなかったことや表現を練り上げる必要性を子供が感じていなかったことが大きな要因だと思われる。



【資料 2：本学級の令和 3 年度標準学力調査の結果（算数科）】

この状況を改善することが研究の中心となり、小・中の接続を円滑に進めるための具体的な方途を模索する上でも価値ある研究であると考えます。

2 主題の意味

(1) 論理的に表現するとは

見出した事柄や問題解決の方法、判断の根拠を、帰納的・類推的・演繹的に推論し、「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の数学的な表現を用いて、自分の考えを記述で表現することである。

「論理的」とは、筋道立てて考えるさまを表し、【資料 3】のように帰納的・類推的・演

帰納的	いくつかの具体例を調べて共通性を見出す。
類推的	既習の内容との類似性に着目して新しい事柄を見出す。
演繹的	すでに正しいことが明らかになっている事柄を基にして別の新しい事柄が正しいことを導き出す。

【資料 3:算数科における数学的推論について】

繹的に推論することである。「表現」とは、自分の考えを具体的な形あるものに記述することである。自分の考えを具現化するには、いくつかの表現方法が必要となる。算数科の学習で使われる表現方法について、中原忠男氏（1991）は、①現実的な表現、②操作的表現、③図的表現、④言語的表現、



【資料4：本研究で取り扱う表現方法】

⑤記号的表現の5つに類型化している。この類型化を基に、本研究対象の第6学年について、小学校学習指導要領解説の「第6学年の目標及び内容」を分析して、主に取り扱う表現方法を、③図的表現、④言語的表現、⑤記号的表現とする。【資料4】

これらのことから、「論理的に表現する」ことを、事柄や問題解決の方法、判断の根拠を、帰納的・類推的・演繹的に推論し、「図に表す」、「言葉や数を用いて説明する」、「式で表す」といった3つの表現方法を用いて、自分の考えを記述で表現していくことと定義する。

(2) 数学への素地を培うとは

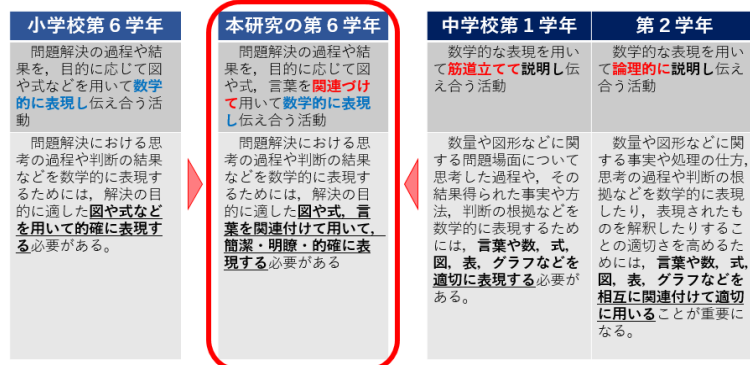
中学数学で求められている論理的な表現の土台作りを目指して、「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現を関連付けて用い、簡潔・明瞭・的確な表現をしていくことである。

小・中接続の先行研究者である國宗進氏（2013）は、算数科になく数学科にある本質的な相違は、論証であると述べている。論証は、ある事柄が正しいことをまず自分が納得し、他人を説得する手立てである。つまり「数学」とは、自分はもちろん他人も納得することができる論理的な表現を育成することを目指した教科であると言える。

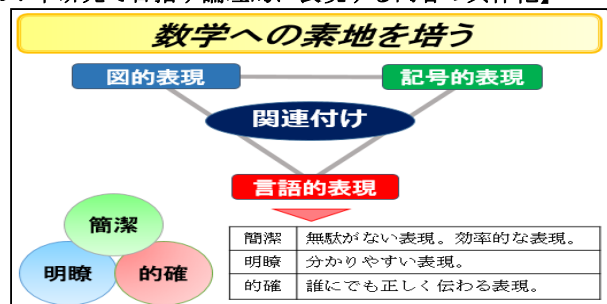
先述したとおり、本県の小・中学生とも、事柄や解法、判断の根拠を数学的な表現を用いて記述することを苦手としている子供が多い。このことから、中学数学への接続を円滑に進めるためには、小学校段階で、論証の内容を意識した、論理的な表現の土台を育成することが重要であると考えられる。

そこで、小・中学校学習指導要領解説の「数学的活動」の目標及び内容を基に、本研究児童が目指す、数学への接続を意識した論理的に表現する内容を【資料5】のように具体化した。

この内容を算数科で身に付けることが「数学への素地を培う」ことであり、本研究対象の第6学年で、論理的な表現を構成する「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つ数学的な表現を関連付けて用いることで、自他共に納得がいく、簡潔・明瞭・的確な表現【資料6】の育成を目指す。



【資料5：本研究で目指す論理的に表現する内容の具体化】



【資料6：「数学への素地を培う」について】

(3) 論理的に表現し、数学への素地を培う子供とは

帰納的・類推的・演繹的に推論した自分の考えを記述で表現する過程で、「相手意識」「活用」「練り上げ」の3つの資質・能力を身に付けていくことで、見出した事柄や問題解決の方法、判断の根拠を「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現を関連付けて、簡潔・明瞭・的確に表現できる子供のこである。

数学的な表現の先行研究者である大橋健司氏(2013)の研究を基に、論理的な表現を形成する資質・能力を「相手意識」「活用」「練り上げ」の観点で、以下のように整理した。

「相手意識」… 相手に説明するために、思考した図や表、式等を用いて、思考内容を簡潔・明瞭・的確に表現できる。 【思考力・判断力・表現力等】
 「活用」… 既習の表現や既習内容から、表現を作り出す着眼点を見出し、それを基に数学的な表現を作ることを理解し、問題事象を図や言葉、式等の表現を用いて、問題解決できる。 【知識・技能】
 「練り上げ」… 他者との関わり合いを通して、自分の数学的な表現を振り返り、自分の数学的な表現のよさをさらに磨いたり、不十分さを克服したりしようとしている。 【学びに向かう力・人間性等】

このことに基づき、中学数学に向けて、育成を目指す具体的な子供の姿を、「相手意識」「活用」「練り上げ」の観点で、【資料7】のように段階的に3つのStageで設定した。

目指す「論理的に表現し、数学への素地を培う」子供の姿			
段 階	Stage1	Stage2	Stage3
相手意識 【思考力・判断力・表現力等】	自分の考えを他者に納得させるために、「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現を関連付けて用い、自分の考えを記述で、簡潔・明瞭・的確に表現できる姿。		
	数学的な表現を用いて、自分の考えを表現できる。	数学的な表現を関連付けて用い、自分の考えを表現できる。	数学的な表現を関連付けて用い、自分の考えを記述で、簡潔・明瞭・的確に表現できる。
活用 【知識・技能】	既習の学習内容から問題解決の着眼点を見出し、それを基に、数学的な表現を作ることを理解し、新たな問題事象においても数学的な表現を用いて、問題解決できる姿。		
	既習事項を基に、問題解決の着眼点を持つことができる。	問題解決の着眼点を基に、自分の考えを、数学的な表現に表し、問題解決ができる。	新たな問題事象でも、数学的な表現を用いて、問題解決ができる。
練り上げ 【学びに向かう力・人間性等】	他者との関わり合いを通して、自分の数学的な表現を振り返り、自分の数学的な表現のよさをさらに磨いたり、不十分さを克服したりしようとしている姿。		
	他者と話すことで、考えを整理・共有し、それを基に自分の考えを数学的に表現しようとする。	記述した表現を基に、自分の考えを伝え、自分の数学的な表現のよさや不十分さを探ろうとする。	他者と関わることで、見出した改善策の方向性を基に、自分の数学的な表現を練り上げようとしている。

【資料7: 本研究で目指す子供の段階的な姿】

本研究では、子供たちが【資料7】に示した資質・能力をStage3まで身に付けることで、「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現を関連付けて、事柄や問題解決の方法、判断の根拠を記述で簡潔・明瞭・的確に表現ができると考える。この子供の姿を「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」とする。

3 副主題の意味

(1) 省察化とは

①自分の数学的表現のよさや不十分さを掘り起こす。②自分の数学的表現のよさや不十分さが生じた原因を分析する。③自分の数学的表現のよさをさらに磨いたり、不十分さを克服したりする改善の方向性を見出すといった自分の表現を省みる行為によって、表現を練り上げていくことである。

省察とは、「決断し、行動して、起こった結果を省みて、次の機会に生かす」ということである。デューイは、省察について「自分の考えを振り返って批判的に思考し、根拠を基に明瞭・簡潔に構成できたか、他者の考えと比較して簡潔であるか、発展的に他の問題に応用できるかと省察することが学習において重要」と述べている。このことから、本研究で目指す、表現を形成していく上で省察が重要になると考え、「省察化」を上記のように定義する。

(2) 数学的コミュニケーションとは

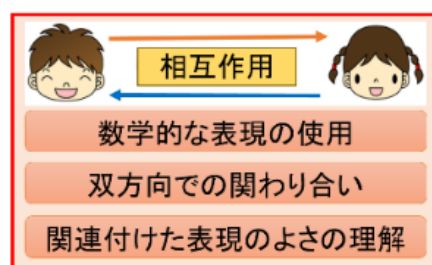
「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現を用いて、他者に考えを論理的に説明したり、他者の数学的に表現したものを読み取ったり、関連付けた数学的な表現のよさを理解したりする、双方向での関わり合いのことである。

数学的コミュニケーションの先行研究者である、金森良通氏(2014)は、数学的コミュニケーションを「数学的な事象に関わるコミュニケーションであり、また、算数数学の表現を使用しているコミュニケーションである」と定義し、効果として以下の4点を示している。

- ①数学的な表現が使用できる。
- ②数学的な考えや考え方についての話し合い活動などの交流ができる。
- ③数学的な記述の表記としての表現のよさが理解できる。
- ④数学的な考えや考え方についての話し合い活動への適切な価値意識と態度が形成されている。

この効果を踏まえ、本研究では、数学的コミュニケーションの成立について、①「数学的な表現を使っていること」②「双方向で関わり合えること」③「関連付けた数学的な表現のよさを理解できること」という他者との相互作用の内容から捉えることにする。**【資料8】**

つまり、算数科における表現方法を使いながら、他者とやりとりを行い、他者に自分の考えを納得させるためには、数学的な表現を関連付けて説明した方がよいことを理解できる、相互作用を伴った関わり合いが、「数学的コミュニケーション」なのである。



【資料8：他者との相互作用】

(3) 省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫とは

「数学的に表現すること」と「考えを読解・解釈すること」の両者を関連させた、数学的コミュニケーション活動の中に、自分の数学的な表現のよさをさらに磨いたり、不十分さを克服したりする省察化を取り入れ、その機能を促進させるための工夫のことである。

これまでの実践において、ペア交流やグループ交流では、①答えの出し合いで終わっている。②一方的にノートに書いていることを読むだけに留まっている。2つの課題が、よく見受けられた。つまり、書いて話すという一方向に終始してしまっていることが多かったのである。そこで、自己と他者の双方向の関わり合いである、数学的コミュニケーションに脚光を当てた。この活動に、自分の数学的な表現のよさや不十分さの原因を探り、その結果、改善の方向性を見出し、表現を練り上げていく省察化を取り入れる。そして、この省察化の機能を促すことによって、本研究が目指す、論理的に表現し、数学への素地を培った子供の姿が期待できると考える。なお、「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」の具体的な内容については、次に述べることにする。

4 研究の構想 -省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫-

論理的に表現し、数学への素地を培うことができる子供たちを育てるために、省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を次の3つの観点から具現化することにする。

(1) 3つの特性を内包した問題設定

子供たちが論理的に表現し、数学への素地を培うことができるようにするためには、数学的コミュニケーション活動がもつ相互作用の働きを最大限に発揮させ、思考を促進させる契機

を与える教材を開発する必要がある。そこで、次の3つの観点から問題を設定する。

目的性：自分の考えを他者に納得させる目的を持たせ、双方向の関わり合いの中で、さらに数学的な表現の練り上げを誘発する。

条件性：既習問題と本時学習問題①②における、問題解決の着眼点を意図的に類似させ、既習問題や問題①を基に、自分の考えを数学的な表現で表したり、既習問題と問題①を抛り所にして、自分の表現の不十分さを改善し表現を練り上げたりしていく省察化を促す。

接続性：中学数学の教材である全国学力・学習調査（中学校）の問題で、論理的に説明することが必要な問題を基に問題作りを行うことで、小中の接続を意識した、論理的に表現するための、統合的な考えの積み重ねを図る。

①「目的性」のある問題

子供が、相手意識を伴った思いをもつためには、一時間のはじめや途中に出会う問題が、矛盾や対立があるもの、また活動意欲をかき立てるものである必要がある。【資料9】

そこで、例えば同じ箱に入っているピザを提示し、「どちらのピザの方がたくさん食べることができますか。」と問うことで、子供たちに「僕は右だ。私は左だ」といった対立を生じさせ、「どちらかはっきりさせたい」という活動意欲を掻き立てさせる。【資料10】このことにより、自分の考えを他者に納得させる

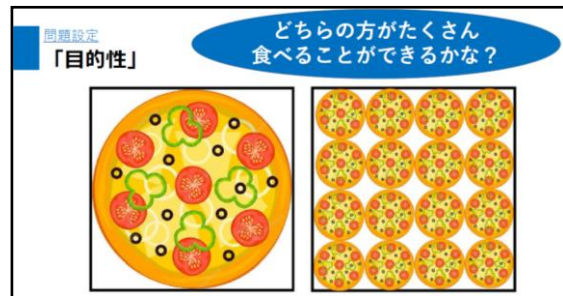
目的をもたせ、双方向の関わり合いの中で、さらに数学的な表現の練り上げを誘発できると考える。これが、「目的性」のある問題である。

②「条件性」のある問題

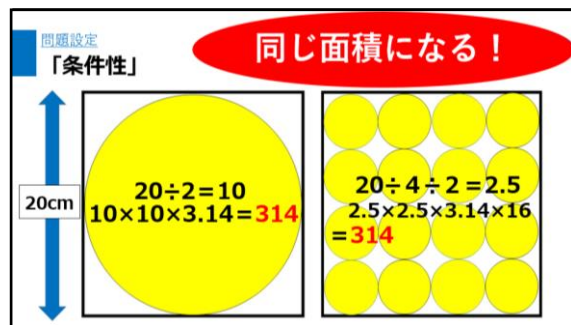
先述の問題であるピザを、円と見立て、実際に面積を求めてみると同じになる。【資料11】これは、「正方形に内接する円の面積の合計はすべて同じになる」きまりがあるからだ。このことを他者に説明するためには、もしくは、このことが本当かどうかを確かめるためには、問題の条件を変えて考察し、自分の考えを表現する必要がある。既習問題と本時学習問題①②は、意図的に問題解決の着眼点を類似させている。これにより、例えば問題②では、問題①を基に、自分の考えを数学的に表現にしやすくなり、問題①を抛り所にして、自分の数学的な表現の不十分さを改善し、表現を練り上げていく省察化を促す効果が期待できると考える。【資料12】これが、「条件性」のある問題である。



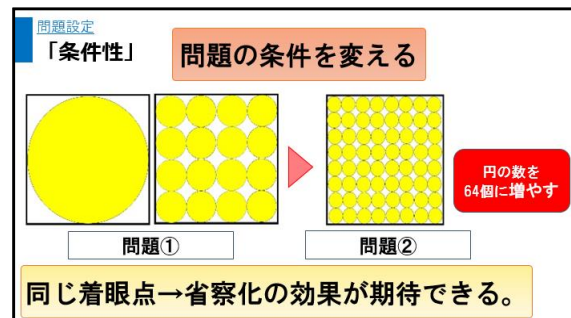
【資料9：自分の考えを他者に説得する際の目的】



【資料10：対立や活動意欲がある問題の例】



【資料11：ピザを円と見立て面積を求めた結果】



【資料12：条件性のある問題について】

③「接続性」のある問題

正方形に内接する円の面積の問題は、【資料13】のように式に着目することで、「半径×半径×3.14×個数がいつも同じ値になる」きまりが見えてくる。中学校では、この事柄を、文字式を使い、式を変形することで一般化し、説明していく。このように、中学数学への接続を意識した問題【資料14】を取り扱うことで、小中の接続を意識した、論理的に表現するための統合的な考えの積み重ねを図ろうと考えた。全国学力・学習状況調査から出題される問題は、教員による指導方法の改善や学習改善の向上等に役立てる視点から、

学習指導上、特に重視される点や身に付けるべき力が具体的に示されたものである。そこで、全国学力・学習状況調査（中学校）の問題の中で、令和3年度全国学力・学習状況調査福岡県調査報告書で小学校算数科の課題として挙げた「①図形を構成する要素などに着目し、図形の構成の仕方を捉えて、面積の求め方と答えが記述できる」「②複数のデータを比較し、示された特徴を持った項目とその数値を記述できる」問題を取り扱い、小中の接続を意識した、論理的な表現を必要とする問題を作成する。これが「接続性」のある問題である。

以上のことから、3つの観点（目的性、条件性、接続性）を考慮しながら、問題設定を図ることで、論理的に表現し、数学への素地を培う子供に迫ることができると考える。

(2) 表現モデルの活用

「表現モデル」とは、論理的な表現の模範となる、子供たちが作成した数学的な表現のことである。省察化を促す数学的コミュニケーション活動を活発にするためには、どの子供も自分の考えを表現することが重要である。そこで、前時学習問題での子供たちの数学的な表現で、図と式、言葉を関連付けた表現を表現モデルとしてタブレットPCに提示し

【資料15】、その表現のよさを取り入れることで、論理的な表現を作っていくことを「表現モデルの活用」とした。前時学習問題と本時学習問題は、意図的に問題解決の着眼点を類似させているので、表現モデルを活用することで、論理的な表現の育成にも繋げることができる。また、表現モデルのよさを交流させる場を設け【資料16】、他者と関わらせることで、簡潔・明瞭・的確に表現されたもののよさが分かり、自分の表現を練り上げる省察化の働きが活発になると考える。

問題設定
「接続性」

半径×半径×π×個数=100π

円の個数1個 半径10cm	$10 \times 10 \times \pi \times 1 = 100\pi$
円の個数4個 半径5cm	$5 \times 5 \times \pi \times 4 = 100\pi$
円の個数16個 半径2.5cm	$2.5 \times 2.5 \times \pi \times 16 = 100\pi$

【資料13：式に着目することで見出せるきまり】

問題設定
「接続性」

半径×半径×π×個数

$n \times \pi \times r^2$

統合

平成24年度全国学カテスト（中学校）

【資料14：平成24年度全国学力・学習調査の問題】

第6学年
表現モデル

表現モデルの活用

【資料15：表現モデルの具体】

第6学年
表現モデル

関わり合い

省察化を促す数学的コミュニケーション活動を活発に!

【資料16：表現モデルを基に、他者と関わらせることで得られる効果】

(3) 段階的な活動設定

省察化を促す数学的コミュニケーション活動の成立に向け、次の3つの活動を段階的に設定する。【資料17】

省察化を促す数学的コミュニケーション活動	考えを整理・共有する活動（「話す」→「かく」活動）
	自分の考えを表現する前に、他者と話し合うことで、 <u>自他の考えを整理したり、表現を作る上で必要な問題解決の着眼点を持つたりする活動</u>
	表現のよさや改善の方向を見出す活動（「かく」→「話す」活動）
	自分の考えを数学的な表現に表し、その表現を基に説明し合うことで、 <u>自分の表現のよさや改善の方向を見出す活動</u>
	表現を洗練する活動（「話す」→「かく」活動）
	考える視点をはっきりさせ、見出した統合的な考えを他者と話し合うことで、 <u>自分の数学的な表現を練り上げる活動</u> ※下線部が、活動を行う目的

【資料17：3つの活動の具体的な内容】

また、上記の3つの活動を活発にさせるために、以下の発問を意図的に行う。【資料18】

考えを整理・共有する活動（「話す」→「かく」活動構成）を促す発問

自他の考えを整理させたり、問題解決の着眼点を持たせたりするために、「自分の考えをかいてみましょう」という前に、「OOさんは、どうしてこう考えたのかな？ 近くの友達と話してみましょう」という問いかけを行う。

考えをかきましょう

OOさんはどうしてこう考えたのかな？ 近くの人と話してみましょう。

表現のよさや改善の方向を見出す活動（「かく」→「話す」活動構成）を促す発問

自分の数学的表現のよさや不十分さを把握したり、他者の数学的表現を読解し、その表現のよさを取り入れたりするために、自分のかいた表現を説明し合う際に、「わかりにくいと感じたところがあったら、質問したり、アドバイスを送ったりしましょう」といった双方向の関わり合いが活発になる問いかけを行う。

自分のかいたことをペアで説明し合ひましょう。

自分のかいたことをペアで説明し合ひましょう。その中でわかりにくいと感じたところがあったら質問してみましょう。

表現を洗練する活動（「話す」→「かく」活動構成）を促す発問

考える視点をはっきりさせ、見出した改善の方向を基に表現を洗練させるために、「共通していることは、何かな？」「どうして、みんなはこの考えを使ったのかな？」「OOさんが、このように考えた理由がわかる？」といった統合的な考えを生む問いかけを行う。

共通していることは何でしょうか？

どうしてこの考えを使ったのですか？ OOさんがこのように考えた理由がわかる？

数学的コミュニケーション

省察化が活発に！

**論理的に表現し、
数学への素地を
培う子供**

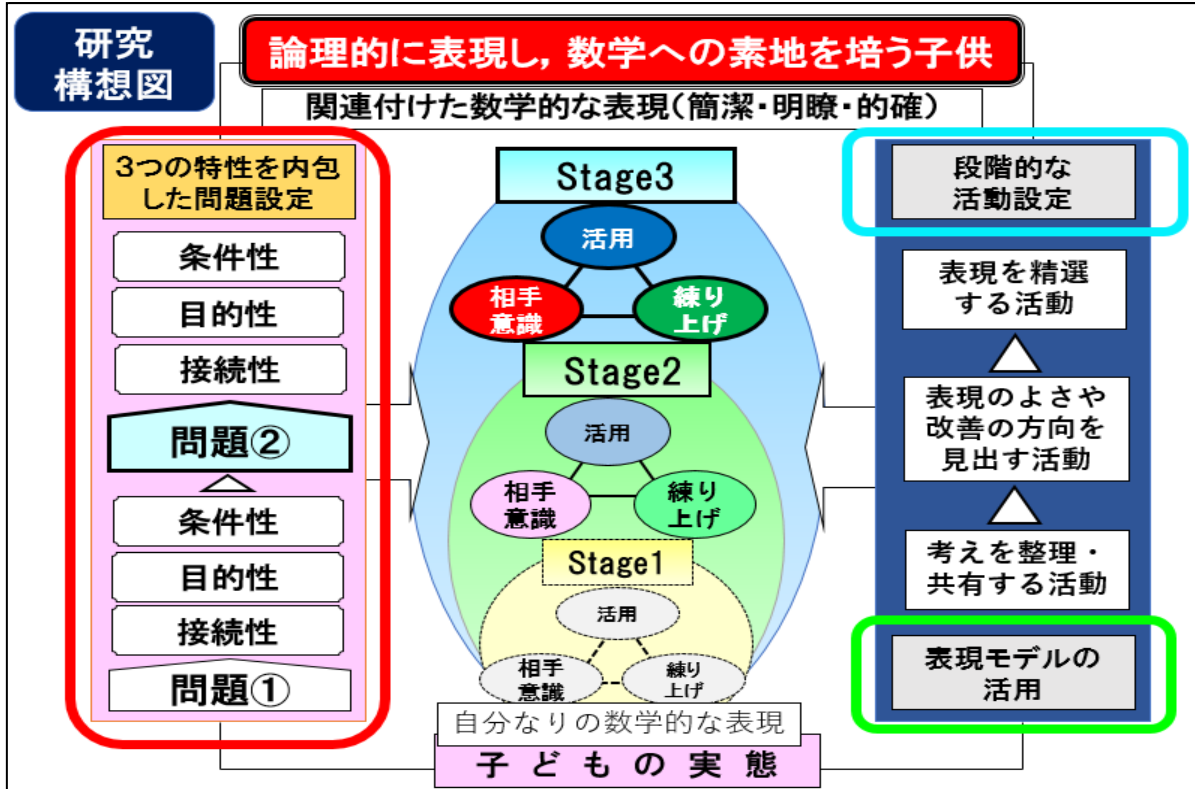
【資料18：3つの活動の具体的な発問内容と目的】

これらの3つの活動を学習過程において、段階的に設定したり、必要に応じて設定したりすることで、子供たちの省察化の働きが活発になり、論理的に表現し、数学への素地を培う子供に迫ることができると考える。

(4) 論理的に表現し、数学への素地を培う子供の見取りについて

本研究では、具体的な実践を通して、「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」を重視した授業づくりの構想【資料19】が有効であるかどうかを検証していく。そのために、

【6頁-資料7】を指標に、【資料20】の実証方法を用いて、子供の変容を見取る。



【資料19：研究構想図】

- 「3つの特性を内包した問題設定」「表現のモデルの活用」「段階的な活動設定」の有効性の検証
 - ・ノート記述の表現の分析
 - ・省察化を促す数学的コミュニケーション活動の様子分析(ビデオ)【対象：個人、クラス全体】
- 「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」の総括的な高まりの検証
 - ・ノート記述の表現の分析
 - ・標準学力調査の結果分析【対象：クラス全体】

目指す「論理的に表現し、数学への素地を培う」子供の姿			
段階	Stage1	Stage2	Stage3
相手意識 【思考力・判断力・表現力等】	自分の考えを他者に納得させるために、「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つの数学的な表現に関連付けて用い、自分の考えを表現できる。	数学的な表現に関連付けて用い、自分の考えを表現できる。	数学的な表現に関連付けて用い、自分の考えを表現できる。
活用 【知識・技能】	既習の学習内容や問題解決の着眼点を見出し、それを基に、数学的な表現を用いて、問題解決ができる。	問題解決の着眼点を基に、自分の考えを、数学的に表現し、問題解決ができる。	新たな学習事象でも、数学的な表現を用いて、問題解決ができる。
練り上げ 【学びに向かう力・人間性等】	他者との関わり合いを通して、自分の数学的な表現を振り返り、自分の数学的な表現のよさをさらに磨いたり、不十分さを克服したりしようとしている姿。	記述した表現を基に、自分の考えを伝え、自分の数学的な表現のよさや不十分さを振り返ろうとする。	他者と関わることで、見出した改善の方向性を基に、自分の数学的な表現を練り上げようとしている。

「ノート記述の表現の分析」の方途
 ①本研究対象児童35人の数学的な表現を一人一人分析し、その表現が「相手意識」「活用」「練り上げ」のどのStageに相当するのかが調べる。(授業中・授業後)
 ②各Stageの達成率の構成比を帯グラフにまとめ、「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」の有効性について実証する。
 ③各Stageに達成した人数を調べ、◎○△でその結果をまとめ、省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫の有効性について実証する。※本研究対象児童35人
 ◎：よくできた(30人以上)
 ○：できた(20人以上30人未満)
 △：もう少し(20人未満)

「標準学力調査の結果分析」の方途
 「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」の総括的な高まりを検証するために、令和3、4年度標準学力調査の結果から、「記述」の観点を中心に、達成率の変容を分析する。

「ビデオ分析」の方途
 対象児童を中心に、授業中の様相や記述における表現の変容を「相手意識」「活用」「練り上げ」の観点でどのStageに相当するのを見取る。

【資料20：実証方法について】

5 研究の目標

第6学年の算数科において、「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」を育てるために「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」を取り入れた算数科学習指導の在り方を究明する。

6 研究の仮説

第6学年の算数科学習指導において、「3つの特性を内包した問題設定」「表現のモデルの活用」「段階的な活動設定」の3つの工夫を行った「省察化を促す数学的コミュニケーション活動」を位置づけた授業展開を行えば、「論理的に表現し、数学への素地を培う子供」を育てることができるだろう。

7 研究の実際

(1) 検証授業Ⅰ 第6学年 単元『円の面積』第8時（令和4年7月6日実施）

① 本時で目指す子供の姿

目指す「論理的に表現し、数学への素地を培う」子供の姿			
段階	Stage1	Stage2	Stage3
相手意識 【思考力・判断力・表現力等】	円の面積の求め方を説明するために、数学的な表現を用いている。	円の面積の求め方を説明するために、数学的な表現を関連付けて用いている。	円の面積の求め方や円の面積が同じになる根拠を説明するために、数学的な表現を関連付けて用い、その表現が簡潔・明瞭・的確である。
活用 【知識・技能】	既習事項を基に、「正方形の1辺の長さが、円の直径の合計になる」問題解決の着眼点を持つことができる。	問題解決の着眼点を基に、正方形に内接した円の面積の求め方を、数学的な表現に表し、問題解決ができる。	見出した着眼点を新たな問題事象で活用し、数学的な表現を用いて、問題解決ができる。
練り上げ 【学びに向かう力・人間性等】	他者と話すことで、考えを整理・共有し、それを基に自分の考えを数学的に表現しようとしている。	記述した表現を基に、自分の考えを伝え、自分の数学的な表現のよさや不十分さを探ろうとしている。	他者と関わることで、見出した改善策の方向性を基に、自分の数学的な表現を練り上げようとしている。

【資料21：検証授業Ⅰにおける評価基準】

ここでは、個人を対象に様相とノートの分析を行う。【6頁-資料7】に示した、本研究で目指す段階的な子供の姿を、検証授業Ⅰにおける評価基準として具体化した【資料21】を基に、子供の数学的な表現の変容から手立ての有効性を考察する。

② 検証授業Ⅰにおける具体的な手立て

ア 3つの特性を内包した問題設定

目的性	「目的性」
自分の考えを他者に説得させる目的（数学的な表現を使っての説明）を持たせるために、同じ箱に入っているピザを提示し、「どちらのピザの方がたくさん食べることができますか。」という判断の対立や活動意欲を掻き立て、双方向の関わり合いを誘発する問題①を設定する。	
条件性	「条件性」
問題①を基に自分の考えを数学的な表現で表したり、問題①を抛り所にして自分の表現の不十分さを改善し表現を練り上げたりしていく、省察化を促させるために、問題①と同じ問題解決の着眼点「正方形の1辺の長さ＝円の直径の合計になる点」を活用できる問題②を設定する。なお、既習問題と問題①も意図的に問題解決の着眼点を類似させているので問題①でも同じ効果が期待できる。	<p>問題① → 問題②</p> <p>同じ着眼点→省察化の効果が期待できる。</p>
接続性	「接続性」
平成24年度全国学力・学習調査（中学校）の文字式の問題を基に、小中の接続を意識した教材づくりを行うことで、「円の面積の合計が、全て314cm ² になる」ことを式に着目して演繹的に説明し合える問題①②を設定する。	<p>半径×半径×π×個数</p> <p>$n \times \pi \times r^2$</p> <p>統合</p> <p>平成24年度全国学力テスト（中学校）</p>

【資料22：検証授業Ⅰにおける問題設定の内容の具体化】

イ 表現モデルの活用

前時学習問題における、子供たちの数学的な表現で、相手意識があり、図と式、言葉に関連付けたもの【資料23】をタブレットPCに提示する。また、前時学習問題の解決の着眼点「図形の面積を求めるために、

説明

まず赤の○をつけた所を①に移動させます。そしたら円の半径になります。

式は $10 \times 10 \times 3.14 \div 2 = 157$

答え 157cm²になります。

【資料23：検証授業Ⅰにおける表現モデル】

長方形の横の長さを円の直径とする点」を基にした子供の表現を提示することで、既習との統合的な考えの積み重ねを図った論理的な表現を作ることができるようにする。

ウ 段階的な活動設定

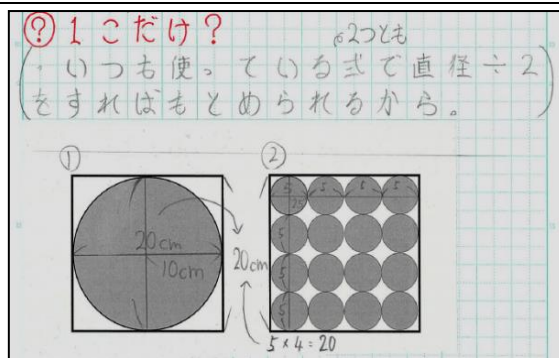
	学 習 活 動	活 動 構 成
導 入	<p>1. 見た目では判断できないことから、正方形に内接したピザを円と見立て、面積で比較し、どちらの方がたくさん食べられるかを明らかにしようという本時学習のめあてをつかむ。</p> <p>○ 数量が隠された同じ箱（正方形）に入っている 2 種類のピザ（円）を見て、どちらの面積が大きいかわかるか自分の考えを持つ。</p> <p>どちらの方がたくさん食べられると思う?</p> <ul style="list-style-type: none"> ・数は右の方が多いから、右の方が大きいよ。 ・すき間の広さは、左の方が狭い気がするから、左かな。 ・長さがわからないから、どちらかわからない。 ・正方形の1辺の長さがわかれば、面積で比べられるよ。 <p>○ 正方形の1辺の長さだけが分かれば面積が求められる理由を話し合い、問題解決の着眼点を明らかにし、本時学習のめあてをつかむ。</p> <p>なぜ1辺の長さだけで面積が求められるのかな? →正方形の1辺の長さが円の直径の合計になるから。</p> <p>めあて 正方形の中にくっついている円の面積を明らかにしよう。</p>	<p>考えを整理・共有する活動</p> <p>(目的) ピザを円に見立てれば、面積の大きさを判断できるという問題解決の方向性を持たせるため。</p> <p>考えを整理・共有する活動</p> <p>(目的) 正方形の1辺の長さが円の直径の合計になるという問題解決の着眼点を持たせるため。</p> <p>表現のよさや改善の方向を見出す活動</p>
展 開	<p>2. 問題解決の着眼点を基に円の面積を求め、どちらの面積が大きいかわかるか明らかにする。</p> <p>どちらも同じ</p> <p>正方形の1辺の長さと同じ円の直径の長さが等しいので、半径は$20 \div 2 = 10$で、$10 \times 10 \times 3.14 = 314$で</p> <p>正方形の1辺の長さと同じ4つ分の円の直径の長さが等しいので、半径は$20 \div 4 \div 2 = 2.5$で、$2.5 \times 2.5 \times 3.14 \times 16 = 314$で</p>	<p>(目的) 自分の数学的な表現のよさや不十分さに気付かせるため。</p>
終 末	<p>3. 自分と友達の考えを比較して共通点を見出すことで、なぜ面積が同じになるのか疑問を持つ。</p> <p>(共通点)・正方形の1辺の長さを基に、半径を見つけている。 →円の面積の公式を使うために。 ・どちらも円の面積が 314 cm^2 ・ピザが正方形の中にあってくっついている。 →正方形の中なら他の枚数でも同じ面積になるのかな?</p> <p>4. 円の数を変えても、面積が同じになるのかを考察し、式を比較することで、その理由を明らかにする。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・やっぱり正方形の中にピザが何枚あっても、面積が同じになる。 ・正方形の1辺の長さがわかれば、円の数が変わっても面積を求めることができる。 ・半径×半径×円の個数の値がすべて100になるから面積が等しくなる。 <p>まとめ 正方形の中にくっついているピザの面積はすべて同じになる。</p>	<p>表現を洗練する活動</p> <p>(目的) 既習事項を活用することで問題解決できたことを実感させ、そのことを自分の表現に取り入れさせるため。</p> <p>表現を洗練する活動</p> <p>(目的) 半径(直径)と円の個数、面積の関係に気付かせるため。</p>

【資料 24: 検証授業 I における段階的な活動内容の具体化】

③ 検証授業 I における子供の反応と考察

導 入	
ねらい	どちらのピザの方がたくさん食べることができるかを明らかにするために、正方形に内接したピザを円と見立て、正方形の1辺を活用して面積で比較する問題解決の着眼点を持つことができるようにする。
手立て	①目的性のある問題の提示 ②考えを共有・整理する活動の設定

はじめに、意図的に図形の数量を隠した、同じ箱（正方形）に入っている2種類のピザを提示し、「どちらのピザの方がたくさん食べることができますか。」と問うた。想定した通り、子供たちは「僕は大きいピザの方だと思う。」「私は、数が多い方だと思う。」と発言し合い、考えの対立を表出させることができた。ここで、「見た目では、どちらの方が大きいかかわからないから、ピザの直径が知りたい」「ピザの半径がわかれば、大きさを計算で求めて比べることができる」と呟いた子供の発言を全体で取り上げ、考えを整理・共有する活動を仕組んだ。

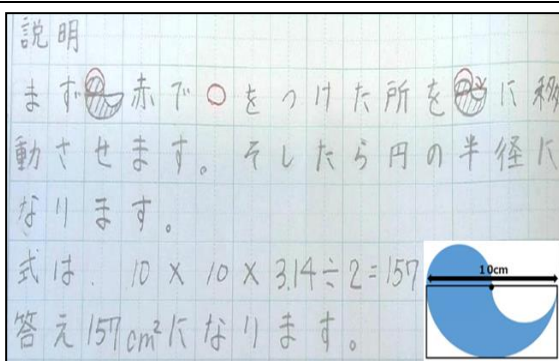


【資料 25 : A 児が表現した問題解決の着眼点】

このことにより、子供たちは大きさを比べるためには、ピザを円に見立てて、既習事項である円の面積の公式を使って問題解決の方向性を持つことができた。そこで、円の面積を求めるために必要な構成要素を1つ（正方形の1辺の長さが20cm）のみ知らせ、なぜその要素だけ分かれば、面積が求められるのか、再び考えを整理・共有する活動を仕組み、その理由を考察させた。この結果、これまで問題解決の着眼点を基に、自分の考えをまとめることができなかった A 児が友達との数学的コミュニケーション活動により、【資料 25】のように、図と式、言葉に関連させて、なぜ正方形の1辺の長さだけ分かれば、面積が求められるかの理由を表現することができた。（活用）

展 開	
ねらい	見出した問題解決の着眼点と表現モデルを基に、どちらの方がたくさん食べられるか、自分の考えを記述で表現し、それを説明し合う中で、自他の数学的な表現のよさや不十分さに気付くことができるようにする。
手立て	①目的性のある問題の提示 ②表現モデルの提示 ③表現のよさや改善の方向性を見出す活動の設定

次に、導入段階での問題解決の着眼点を基に、どちらの方がたくさん食べられるか、自分の考えを記述で表現させた。その際、前時学習と問題解決の着眼点が類似していることから、「前回の友達の表現モデルを参考にしたい。」という声が上がった。そこで、前時学習で相手意識のある数学的な表現ができているもの【12頁-資料 23】を、表現モデルとして提示した。こ



【12頁-資料 23 : 検証授業 I における表現モデル】

のにより、これまで式のみで自分の考えを表現してきた子供たちが、式と言葉を関連付け、自分の考えを表現していくことができた。(相手意識) 【資料 26】

また、A 児は考えを整理・共有する活動で整理した自分の数学的な表現と、表現モデルを基に、どちらも面積が同じになることを、式と言葉を関連付けて表現することができていた。

ここで、表現のよさや改善の方向性を見出す活動を設け、自分の考えを友達に説明させた。A 児は、ペアから「説明は、とてもわかりやすいよ。でも円が 16 個あるから、最後に何かしないと、A さんの言いたいことと、式と答えが違ったことになってしまうよ」という助言を受け、自分の数学的な表現の不十分さに気付くことができた。(練り上げ) 【資料 27】

このことから、表現モデル活用の工夫と、表現のよさや改善の方向性を見出す活動を仕組んだことは、数学的な表現を関連付けて用いる点(相手意識)と自分の表現の不十分さが生じた原因を探ろうとする点(練り上げ)で有効であったと考える。

まず大きい円を求めます。直径が 20 cm なの下半径を求める式が $20 \div 2 = 10$ で半径は 10 cm です。大きい円の面積は $10 \times 10 \times 3.14 = 314$ で大きい円の面積は 314 cm^2 になると思います。次に小さい円を求めます。正方形の辺が 20 cm なの直径を求める式が $20 \div 4 = 5$ で直径は 5 cm です。20 \div 4 の 4 は正方形の中に円が 4 つ入っているという意味です。1 つの円の半径は $5 \div 2$ をして 2.5 cm になります。小さい円の面積は $2.5 \times 2.5 \times 3.14 \times 16 = 314$ で小さい円の面積は 314 cm^2 になると思います。

【資料 26：式と言葉を関連付けた数学的な表現】



本当だ。正方形の中に円が 16 個あるから、式に $\times 16$ がないとおかしいよね。

次に小さい円を求めます。直径は、小さい円の 4 分だけ $20 \div 4 = 5$ 、 $5 \div 2 = 2.5$ で半径が 2.5 cm になります。だから式は $2.5 \times 2.5 \times 3.14$ で 19.625 cm^2 になるから、答えは、 ~~19.625~~ $19.625 \times 16 = 314$ ~~19.625~~ 314 になります。

【資料 27：表現の改善の方向を見出していく A 児の様子】

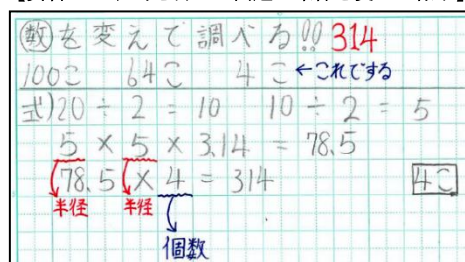
終末	
ねらい	面積が全て同じになることを円の数を変えて考察したり、式に着目することで半径(直径)と円の個数、面積の関係に気づき、そのことを自分の数学的な表現に取り入れたりすることができるようにする。
手立て	①表現を洗練する活動の設定 ②条件性のある問題の提示 ③目的性のある問題の提示 ④接続性のある問題の提示

ここでは、表現を洗練する活動を仕組み、自分の考えと友達の考えで「共通していることは何か」、「どうしてその考えを使おうと思ったのか」解法の判断理由まで考察させた。子供たち

は自他の表現を比較することで、既習事項である円の面積の公式を使って問題解決を行っている共通点を見出し、自分の数学的な表現に取り入れる、表現の練り上げができていた。また、この活動を設けたことで、子供たちは「正方形の中なら他の枚数でも、全て同じ面積になるのでは?」「本当に数を変えても同じ面積になるのか、確かめてみたい」と発言した。これは、活動意欲を掻き立てた姿である捉えることができる。このことから、問題の条件を変えて考察し、その結果である自分の考えを、他者に伝えたいという目的を持たせることができたと言える。そこで、子供たちがそれぞれ円の個数を変え、面積が 314 cm^2 になるのか、考察させた。【資料 28】子供たちは、タブレット PC を活用し、円の数が変わっても、円の面積がすべて 314 cm^2 になることを導き出し、「円が正方形に内接するときは、個数が変化しようとも面積は同じである」ことを表現することができた。(相手意識)



【資料 28：目的を持って問題の条件を変えた様子】



【資料 29：式に着目して見出したことを記述した B 児の表現】

その後、「円の面積がすべて 314 cm^2 になる」ことを式に着目して考察している児童の発言を全体で取り上げ、再び表現を洗練する活動を設けた。このことによって、答えが 314 cm^2 になることしか着目していなかった B 児は、半径（直径）と円の個数、面積の関係に気づき、そのことを自分の数学的な表現に取り入れることができた。【資料 29】これは本研究で目指す、小中の接続を意識した論理的に表現するための、統合的な考えの積み重ねを図っている子供の姿と捉えることができる。

これらのことから、表現を洗練する活動と、3つの特性を内包した問題設定は、正方形に内接する円の面積が同じになる理由を式に着目して考察し、そのことを数学的な表現に関連付けて表現する上で、有効であったと考える。

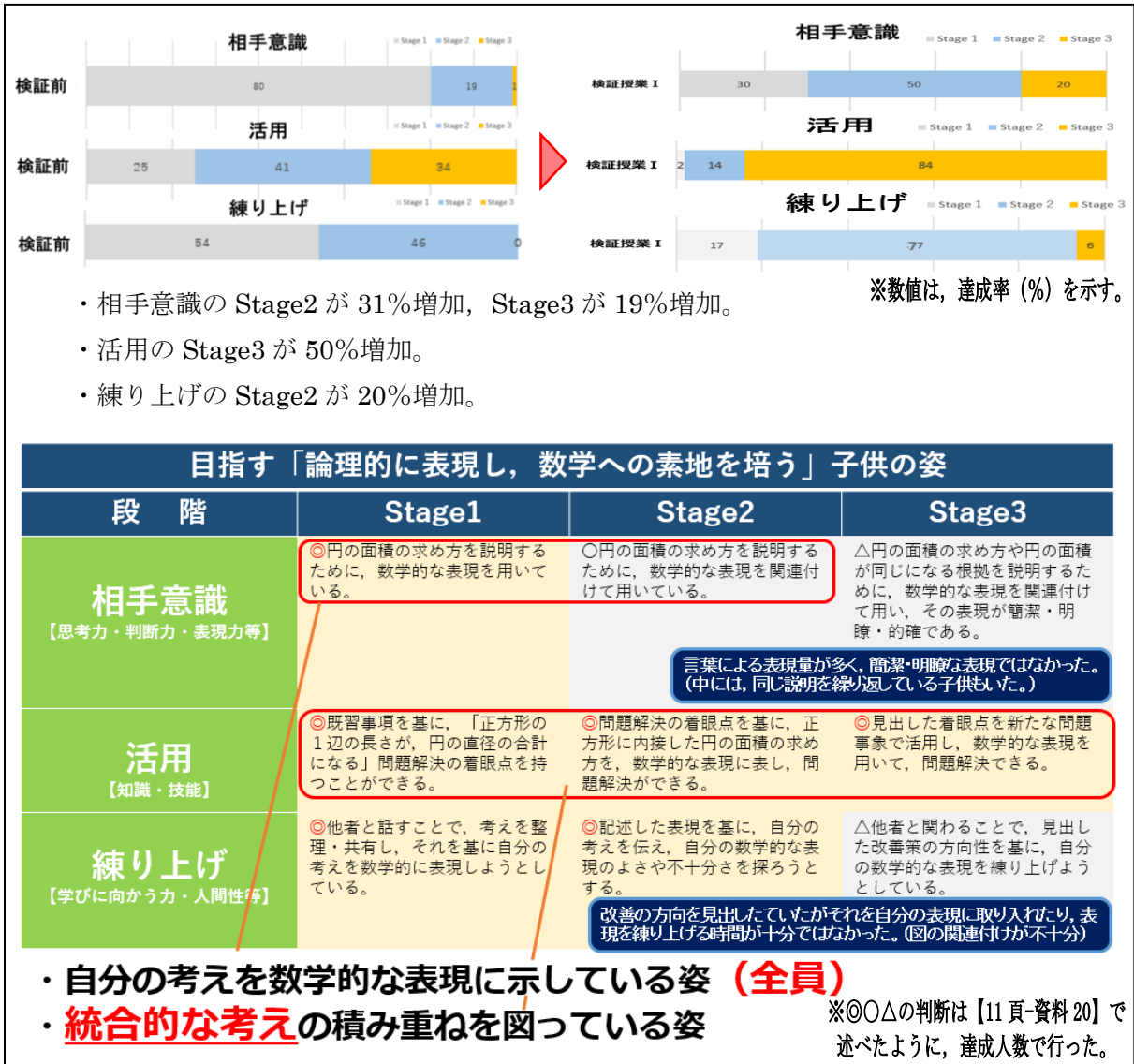
④ 検証授業 I における成果と課題

検証授業 I から、次のような子供の姿の変容が見られた。

- 3つの特性を内包した問題設定により、既習事項との類似性に着目して、自分の考えを類推的に推論し、そのことを論理的に表現していく姿や、問題の条件を変えても自分の考えを表現していこうとする姿。
- 段階的な活動設定により、問題解決の着眼点を持ち、数学的な表現の作成に意欲的に取り組む姿や、数学的な表現の不十分さを友達に指摘され、それを基に、自分の表現を改善しようとする姿。
- 表現モデルの活用により、友達に自分の考えを理解してもらうためには、図と式、言葉に関連付けて表現する必要があることに気づき、自分の数学的な表現に取り入れていった姿。

以上のことから、省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を行うことは、正方形に内接する、円の面積を求める問題解決の方法や全ての面積が同じになる理由を、他者に納得させる論理的な表現を形成する上で有効であった。このことは、検証授業 I 前に行った、論理的な表現の実態把握調査（令和 4 年 6 月 3 日実施）の結果からの推移などをまとめた【資料

30】から主張できる。なお、実態把握調査で扱った問題は、令和3年度全国学力・学習調査（算数）で課題が指摘された「複数の図形を組み合わせた平行四辺形について、図形を構成する要素などに着目し、図形の構成の仕方を捉えて、面積の求め方と答えを記述できるか」を問う問題である。



【資料30：検証授業 I における分析結果】

検証授業 I では、【資料30】からも分かるように、以下の点が不十分であった。

- 他者を納得させる簡潔・明瞭な表現を作り上げる点。
→ 数学的な表現を関連付けて表現できているが、言葉による表現の量が多く、簡潔・明瞭な表現の省察化が不十分であった。そのため、他者との関わり合いの際、自分の考えを納得させるのに時間がかかっていた。
- 図を関連付けて自分の表現を練り上げる時間の確保。
→ 自他の表現のよさや不十分さを把握でき、改善の方向をノートに記してはいたが、その表現を省察化するまで至っていない子供がいた。

そこで、検証授業 II では、表現モデルに観点を示し、簡潔・明瞭な表現の育成を目指す。また、表現を練り上げる時間を十分に確保することで、どの子供も、Stage3 まで到達できる「省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫」の改善を図っていく。

(2) 検証授業Ⅱ 第6学年 単元『資料の調べ方』第9時（令和4年12月9日実施）

検証授業Ⅱでは、検証授業Ⅰの課題を踏まえ、「最頻値で比べると」「柱状グラフを見ると」といった相手意識があり、簡潔・明瞭に表現できる記述の例を表現モデルに取り入れ、そのよさを全体で交流させる場を設ける。また、表現を精選する活動の時間を十分に設けることにする。そして、検証授業Ⅰと同様に個人を対象にした様相やノートを分析し、下記の評価基準【資料31】を基に子供の数学的な表現の変容から手立ての有効性から考察する。

① 本時で目指す子供の姿

目指す「論理的に表現し、数学への素地を培う」子供の姿			
段 階	Stage1	Stage2	Stage3
相手意識 【思考力・判断力・表現力等】	自分が選んだ紙飛行機が有利である理由を説明するために、数学的な表現を用いている。	自分が選んだ紙飛行機が有利である理由を説明するために、数学的な表現を関連付けて用いている。	自分が選んだ紙飛行機が有利である理由を説明するために、数学的な表現を関連付けて用い、その表現が簡潔・明瞭・的確である。
活用 【知識・技能】	既習事項を基に、「複数の代表値や柱状グラフの散らばりから判断する」問題解決の着眼点を持つことができる。	問題解決の着眼点を基に、どちらの紙飛行機が有利か、自分の考えを数学的な表現に表し、問題解決ができる。	新たな問題事象でも、見出した問題解決の着眼点を基に、どちらの紙飛行機が有利か、自分の考えを数学的な表現に表し、問題解決ができる。
練り上げ 【学びに向かう力・人間性等】	他者と話すことで、考えを整理・共有し、それを基に自分の考えを数学的に表現しようとしている。	記述した表現を基に、自分の数学的な表現のよさや不十分さを探ろうとしている。	他者と関わることで、見出した改善策の方向性を基に、自分の数学的な表現を練り上げようとしている。

【資料31：検証授業Ⅱにおける評価基準】

目的性	条件性	接続性
<p>自分の考えを他者に説得させる目的（数学的な表現を使っての説明）を持たせるために、最小値と最大値のいずれかが一方の値がもう一方を上回る資料を提示し、「どちらの紙飛行機の方が有利か」という判断の対立を生じさせ、双方向の関わり合いを誘発する問題①を設定する。</p>	<p>問題①を基に自分の考えを数学的な表現で表したり、問題①を抛り所にして自分の表現の不十分さを改善し表現を練り上げたりしていく、省察を促させるために、問題①と同じ、問題解決の着眼点「柱状グラフから散らばりの様子を調べる」を活用できる問題②を設定する。なお、既習問題と問題①も意図的に問題解決の着眼点を類似させているので問題①でも同じ効果が期待できる。</p>	<p>令和4年度全国学力・学習調査（中学校）のデータの活用の問題を基に、小中の接続を意識した教材づくりを行うことで、「どの紙飛行機が有利であるか」を代表値や散らばりの様子に着目して、批判的に考察し自分の考えを互いに説明し合える問題①②を設定する。</p> <p>「資料の調べ方」の学習における問題設定</p>

【資料32：検証授業Ⅱにおける問題設定の内容の具体化】

イ 表現モデルの活用

検証授業Ⅰと同様に、前時学習問題における数学的な表現で、相手意識があり、図と式、言葉に関連付けたものを、タブレットPCに提示する。また、検証授業Ⅰで言葉による表現の量

が多く、簡潔・明瞭な表現の省察が不十分であった課題があった。そこで「柱状グラフでみると」「最小値でみると」といった相手意識があり、簡潔・明瞭・的確に表現できる言葉(観点)を示した、子供の表現を記述の例として表現モデルに取り入れ、改善を図る。【資料33】



【資料33：検証授業Ⅱにおける表現モデル】

ウ 段階的な活動設定

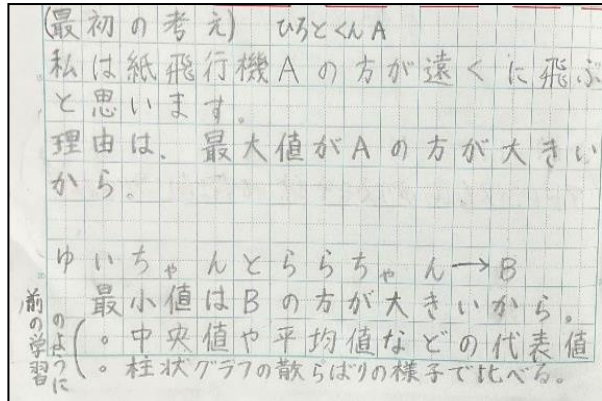
	学 習 活 動	活 動 構 成																																								
導入	<p>1. データの異なる二つの紙飛行機の記録を基に話し合い、本時学習のめあてをつかむ。</p> <p>(1) 提示された資料を基に二つの紙飛行機の比べ方を考え、どちらの紙飛行機の方がよさそうか予想【最初の考え】を出し合う。</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <caption>紙飛行機A</caption> <tr><th>回数</th><th>記録</th><th>回数</th><th>記録</th></tr> <tr><td>1回目</td><td>8m</td><td>5回目</td><td>7m</td></tr> <tr><td>2回目</td><td>2m</td><td>6回目</td><td>6m</td></tr> <tr><td>3回目</td><td>2m</td><td>7回目</td><td>5m</td></tr> <tr><td>4回目</td><td>7m</td><td>8回目</td><td>5m</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">紙飛行機大会で使うなら、どちらを選ぶ?</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-left: 20px;"> <caption>紙飛行機B</caption> <tr><th>回数</th><th>記録</th><th>回数</th><th>記録</th></tr> <tr><td>1回目</td><td>4m</td><td>5回目</td><td>7m</td></tr> <tr><td>2回目</td><td>6m</td><td>6回目</td><td>6m</td></tr> <tr><td>3回目</td><td>7m</td><td>7回目</td><td>5m</td></tr> <tr><td>4回目</td><td>6m</td><td>8回目</td><td>6m</td></tr> </table> <p>・最大値では、A機9m、B機7mでA機の方がよい。 ・平均値を求めると、A機5.5m、B機5.6mでB機の方がよい。</p> <p>(2) 資料から分かること(平均値, 最大値), 分からないこと(散らばりの様子)を捉え、本時学習の見通しを持つ。 (見通し) 散らばりの様子がわかれば判断できそう。→柱状グラフ</p>	回数	記録	回数	記録	1回目	8m	5回目	7m	2回目	2m	6回目	6m	3回目	2m	7回目	5m	4回目	7m	8回目	5m	回数	記録	回数	記録	1回目	4m	5回目	7m	2回目	6m	6回目	6m	3回目	7m	7回目	5m	4回目	6m	8回目	6m	<p>考えを整理・共有する活動</p> <p>(目的) 複数の代表値や柱状グラフの散らばりから判断する問題解決の着眼点を持たせるため。</p>
回数	記録	回数	記録																																							
1回目	8m	5回目	7m																																							
2回目	2m	6回目	6m																																							
3回目	2m	7回目	5m																																							
4回目	7m	8回目	5m																																							
回数	記録	回数	記録																																							
1回目	4m	5回目	7m																																							
2回目	6m	6回目	6m																																							
3回目	7m	7回目	5m																																							
4回目	6m	8回目	6m																																							
展開(前段)	<p>めあて 散らばりの様子を根拠に、紙飛行機の特徴をまとめ、大会で使う紙飛行機を選ぼう。</p> <p>2. 二つの紙飛行機の記録を柱状グラフに表して散らばりの様子や代表値を調べたり、それぞれの特徴や傾向を考えたりして、自分の考え【中間の考え】をまとめる。</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <caption>紙飛行機Aの記録</caption> <tr><td>8</td><td>2</td><td>2</td><td>7</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <caption>紙飛行機Bの記録</caption> <tr><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr> <th>紙飛行機A</th> <th>比べる観点</th> <th>紙飛行機B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>山が二つ(離れている)</td> <td>全体の形</td> <td>山が一つ</td> </tr> <tr> <td>広い</td> <td>散らばりの範囲</td> <td>せまい</td> </tr> <tr> <td>9m</td> <td>最大値</td> <td>7m</td> </tr> <tr> <td>5.625m</td> <td>平均値</td> <td>5.85m</td> </tr> <tr> <td>7m</td> <td>最頻値</td> <td>6m</td> </tr> </tbody> </table> <p>・A機は山が二つで、よく飛ぶときと飛ばないときが半々だ。 ・B機は範囲が狭くて、大きな記録がないかわりに、失敗も少ない。</p>	8	2	2	7	4	6	7	6	5	6	紙飛行機A	比べる観点	紙飛行機B	山が二つ(離れている)	全体の形	山が一つ	広い	散らばりの範囲	せまい	9m	最大値	7m	5.625m	平均値	5.85m	7m	最頻値	6m	<p>表現のよさや改善の方向を見出す活動</p> <p>(目的) 自分が選んだ紙飛行機が有利である理由を他者に話すことで、自分の表現のよさや不十分に気付かせるため。</p>												
8	2	2	7																																							
4	6	7	6	5	6																																					
紙飛行機A	比べる観点	紙飛行機B																																								
山が二つ(離れている)	全体の形	山が一つ																																								
広い	散らばりの範囲	せまい																																								
9m	最大値	7m																																								
5.625m	平均値	5.85m																																								
7m	最頻値	6m																																								
展開(後段)	<p>3. それぞれの考えを出し合ってデータの分析の妥当性について考え、自分の考え【最終の考え】をまとめる。</p> <p>(3) ペアで互いの考えを説明し合い、全体でそれぞれの紙飛行機の特徴についてまとめる話し合いを行う。</p> <p>(4) 話し合いを基に、自分の考え【最終の考え】をまとめる。</p> <p>・A機は記録が散らばっていて予想が難しいけど、よく飛ぶ可能性も持っていると言えるね。 ・B機は平均値の周りに集まっていて安定感があるから、次も同じように飛ぶことが予想できそう。 ・最初はA機を選んでしたが、友だちの考えを聞いて、散らばりの範囲が狭い方が失敗が少ないので、大会ではB機を選択しようと思う。</p>	<p>表現を洗練する活動</p> <p>(目的) 「どうしてその代表値を使ったのか」を聞き合うことで、自分の表現を練り上げさせるため。</p>																																								
終末	<p>4. もし合計の飛距離で争う大会だったら、どちらの飛行機を選ぶか考察し、自分の考えをまとめる。</p>	<p>考えを整理・共有する活動</p> <p>(目的) 複数の代表値や柱状グラフの散らばりから判断する問題解決の着眼点を持たせるため。</p>																																								

【資料34：検証授業Ⅱにおける段階的な活動内容の具体化】

③ 検証授業Ⅱにおける子供の反応と考察

導入	
ねらい	どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか、最大値や最小値だけでは判断しにくいことから、他の代表値や柱状グラフの散らばりにも着目する必要があるという問題解決の着眼点を持たせる。
手立て	①目的性のある問題の提示 ②考えを共有・整理する活動の設定

まず、最小値と最大値のいずれかが一方の値がもう一方を上回る資料を提示し、どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか判断させた。想定した通り、子供たちは「僕はAだと思ふ。だって、最大値はAの方が大きいもん。」「私は、Bかな。だって、最小値はBの方が大きいから。」と呟き、考えの対立を表出させることができた。そこで、考えを整理・共有する活動を仕組んだ、このことにより、B児は提示されたデータだけでは、自分の考えを友達に納得させることができないことに気付くことができた。また、「この問題は、前のシャボン玉の問題と似ているね」という友達の発言から、他の代表値や柱状グラフの散らばりにも着目すれば、相手を納得させる説明ができるという、問題解決の着眼点を持つことができた。【資料35】



【資料35：B児の判断理由と問題解決の着眼点】

これらのことから、目的性を内包する問題設定と、考えを整理・共有する活動は、既習事項を基に問題解決の着眼点を持たせる点（活用）と、それを基に自分の表現を精選していこうとする目的（練り上げ）を持たせる上で有効であったと考える。

展開（前段）	
ねらい	見出した問題解決の着眼点や友達の表現モデルを基に、どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか、自分の考えを数学的な表現に表すことができるようにする。
手立て	①目的性のある問題の提示 ②表現モデルの活用→表現モデルのよさを十分に実感させる場の設定(検証授業Ⅰの改善策)

導入段階で見出した、問題解決の着眼点を基に、どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか、自分の考えを表現させた。その際、検証授業Ⅰの課題を改善するために「表現モデルのよさを十分に実感させる場の設定」を仕組み、関連付けた表現のよさや簡潔・明瞭・的確である表現のよさを全体で交流させた。検証授業Ⅰでは、数学的な表現の関連付けまでできていたものの、言葉による表現の量が多く、簡潔な表現の省察化が不十分であったC児は、【19頁-資料33】

回数	記録	回数	記録
1回目	8m	5回目	7m
2回目	2m	6回目	3m
3回目	2m	7回目	7m
4回目	7m	8回目	9m

回数	記録	回数	記録
1回目	4m	5回目	7m
2回目	6m	6回目	6m
3回目	7m	7回目	5m
4回目	6m	8回目	6m

(理由)
私はBの方が有利だと思います。
理由は、2つの柱状グラフを比べると、Aは山が2つにたいし、Bは山が1つなのでAよりバラつきがなく、まともで安定しているからで、他に、Aの最小値2と最大値9を比べると、差が7mもあるにたいして、Bの最小値4と最大値7を比べると、差が3mしかないで、Bのほうがあまり大きすぎず安定しているからです。しかもAとBの最小値を比べてみると、Bのほうが2m大きいので、私はBの方を考えます。

【資料36：表現モデルを活用した数学的な表現】

表現モデルの「○○で比べると」という表現を取り入れ、相手意識を持って、自分の考えをまとめていく姿が見られた。【資料 36】また、これまで問題解決の着眼点は持てるが、それを基に自分の考えをまとめることが難しかった B 児も、前時学習と本時学習の問題解決の着眼点が類似していることから、前時の友達の表現の仕方を参考にして、自分の考えを記述で表現することができていた。

これらのことから、目的性のある問題設定と、表現モデル活用の工夫は、既習事項を基に、他者に自分の考えを納得させる、数学的な表現を育成していく上で有効であったと考える。

展開(後段)	
ねらい	どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか、自分の数学的な表現を基に、他者と話し合うことで、自他の数学的な表現のよさや不十分さに気付くことができるようにする。
手立て	①表現のよさや改善の方向を見出す活動の設定 ②表現モデルの提示 ③表現を精選する活動の設定→表現を精選する時間の十分な確保(検証授業Ⅰの改善策)

展開(前段)段階でまとめた表現を基に、表現のよさや改善の方向を見出す活動を設けた。

【資料 37】に、子供の反応と B 児のノートを考察したものを示す。

ペアにA機の方が遠くに飛ぶ理由を説明した後	ペア
<p>ペア 最大値と中央値、あと平均値で比べようと思ったんだね。柱状グラフに、中央値を書き込んでいるからAの方が有利ってわかりやすいね。だけど、なんで言葉でそのことを書かなかったの？</p> <p>B児 中央値が7mでA機の方が有利って伝えたかったのと、それ以外にもA機の方がB機より数が多いということを伝えたかったんだけど…</p> <p>ペア どういうこと？</p> <p>ここで、B児が2つの柱状グラフの中央値より大きい値をマークする。</p> <p>B児 なんて、書けばいいかわからなくて…</p>	<p>ペア あー。なるほど。それなら、前回の○○君のお手本(表現モデル)を使えばいいと思うよ。グラフにも書き込んで、言葉の説明もあったから。あとさ、平均値を求めてたのに、なんで途中でやめたの？式もあって、わかりやすいのに。</p> <p>B児 だって、計算したら平均値はAが5.65mでBが5.875mだもん。</p> <p>ペア なるほど。平均値で比べたら、Bの方が有利になるもんね。それなら、僕みたいに山に注目して考えたら？Aは2つの山があって、その山の幅が2m以上10m未満で広いから、Bより遠くに飛ぶ可能性があると言えるよ。</p> <p>B児 それは、思いつかなかった。ありがとう。</p> <p>その後B児は、平均値を求める式を消し、ペアのアドバイスを基に表現を練り上げていた。</p>

紙飛行機A

回数	記録	回数	記録
1回目	8m	5回目	7m
2回目	2m	6回目	3m
3回目	2m	7回目	7m
4回目	7m	8回目	6m

紙飛行機B

回数	記録	回数	記録
1回目	4m	5回目	7m
2回目	6m	6回目	6m
3回目	7m	7回目	5m
4回目	6m	8回目	6m

(理由)
私は紙飛行機Aの方が良いと思います。
理由は、最大値を比べると、Bは7mなのに対してAは9mなので、よく飛んでいるAの方が有利だからです。
また、中央値を比べると、Aは7mなのに対して、Bは6mなので、中央値が大きいAの方が良いと思うからです。
他にも、柱状グラフを見て比べると、Bは1つの山になっているけど、Aは、山が2つで、広がっているのだから、長く飛ぶ可能性があるからです。
そして、Aは中央値より大きい数が8m、9mと2つあって、Bは7m、7mで2つです。同じ2つだけ、数が大きいのはAなので、私はAの方を選びます。

【資料 37：B児の数学的な表現の練り上げ過程】

どのように表現すればよいか分からずに手を止めていた B 児は、数学的コミュニケーション活動により、他者の表現のよさを取り入れ、表現の改善の方向性を見出すことができた。また、

自分の数学的な表現に自信を持っていた子供たちも、表現を精選する活動の時間を十分に確保したことで、自分が着目していなかった代表値にも着目し、さらに他者を納得させる説得力のある表現に練り上げるために、積極的に数学的コミュニケーション活動を図り、見出した他者の表現のよさを自分の表現に取り入れることができていた。(練り上げ)

これらのことから、表現のよさや改善の方向を見出す活動と、表現モデル活用は、自分の表現の不十分さを改善し、さらに相手に自分の考えを納得させる、的確な表現に練り上げていく上で有効であったと考える。(相手意識)(練り上げ)

展開	
ねらい	代表値がすべて同じである2つの紙飛行機BとCでも、問題①で活用した柱状グラフから散らばりの様子を探る問題解決の着眼点を基に、どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか、自分の考えを数学的な表現に表すことができる。
手立て	①条件性のある問題の提示 ②考えを共有・整理する活動の設定 ③表現モデルの提示 ④接続性のある問題の提示

ここでは、条件を変えた問題(代表値がすべて同じである2つの紙飛行機BとC)を提示した。子供たちは「どちらを選んでもいいのでは?」「実は、全く同じ紙飛行機ではないの?」「そんなこと、ありえる?」と発言していた。その中で、C児が「もしかして、柱状グラフが違う?」と呟いた。この発言を基に、考えを整理・共有する活動を仕組んだ。このことにより、子供たちは、代表値だけではなく柱状グラフから、散らばりの様子を探る問題解決の着眼点を持つことができた。そして、考えを整理・共有する活動で見出した、問題解決の着眼点や問題①で練り上げた自分の数学的な表現を基に、子供たちはどちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか簡潔・明瞭・的確に表現することができていた。(相手意識)【資料38】この子供の姿から、接続性を内包した問題には、小中の接続を意識した「データを批判的に考察する」統合的な考えの積み重ねを図らせる効果があったことを主張できる。



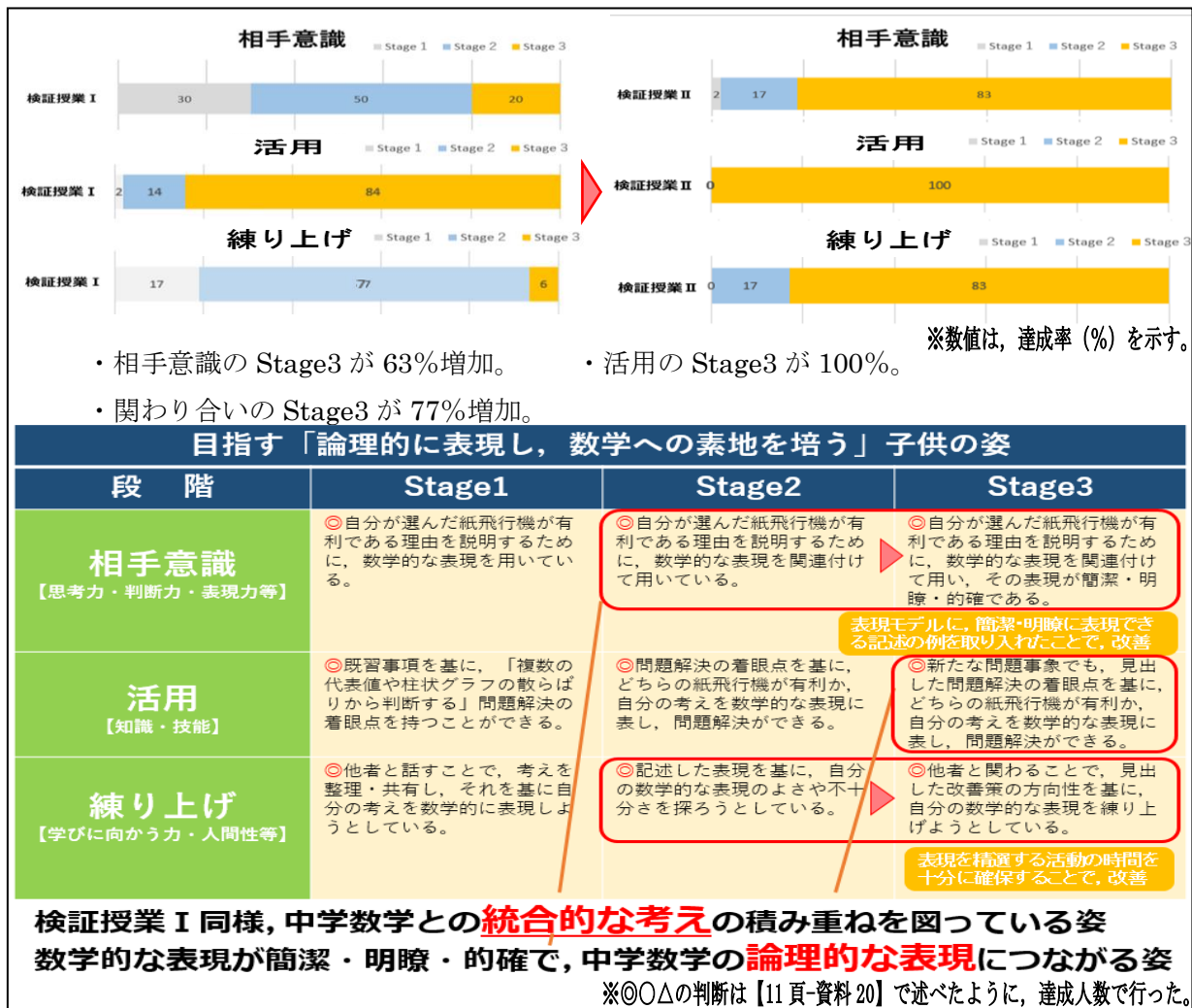
以上のことから、3つの特性を内包した問題設定と、考えを整理・共有する活動は、既習事項を基に、問題解決の着眼点を類推し、数学的な表現を関連付けて問題解決できる点(相手意識)(活用)において有効であったと考える。

④ 検証授業Ⅱにおける成果と課題

検証授業Ⅱの考察の結果から、次の2つのことを主張できる。

- 観点を示した表現モデルのよさを全体で交流させたり、表現を精選する時間を十分に確保したりする、表現モデルの活用の改善により、数学的な表現の省察化が促進し、検証授業Ⅰでの課題であった、他者を納得させる簡潔・明瞭な表現への練り上げの改善ができた。
- 表現のよさや改善の方向を見出す活動により、主体的にお互いの考えを読解したり、解釈したりしながら、子供たちの相互作用の中で、数学的な表現を練り上げていこうとする姿勢を育むことができた。

以上のことから、省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫を行うことは、どちらの紙飛行機の方が遠くに飛ぶか判断した理由を、他者に納得させる論理的な表現を形成する上で有効であった。このことは、次のようにまとめられる。【資料 39】

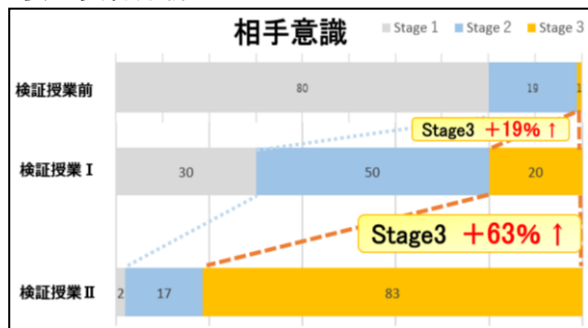


【資料 39：検証授業 II における分析結果】

(3) 全体考察

① ノート記述の分析結果による、目指す子供の姿の変容分析

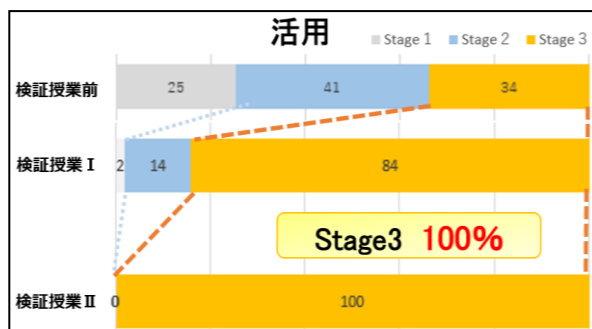
検証授業前と検証授業 I、検証授業 II での子供のノート記述から、目指す子供の段階的な姿の達成状況について、数値的な分析を行う。【資料 40】【資料 41】【資料 42】相手意識の Stage3 の達成率が検証授業 I では 19% 増加し、検証授業 II では 63% 増加した。活用の Stage3 の達成率が検証授業 II では 100% になり、練り上げの Stage3 の達成率が 77% に大幅に上昇する成果が見られた。これは、「3つの特性を内包した問題設定」「表現モデルの活用」「段階的な活動設定」の3つの工夫を行った「省察化を促す数学的コミュニケーション活動」を位置づけた授業展開を行うことで、子供たちが「論理的に表現し、数学への素地を培う力」をつけることができたことと捉えることができる。このことは、本



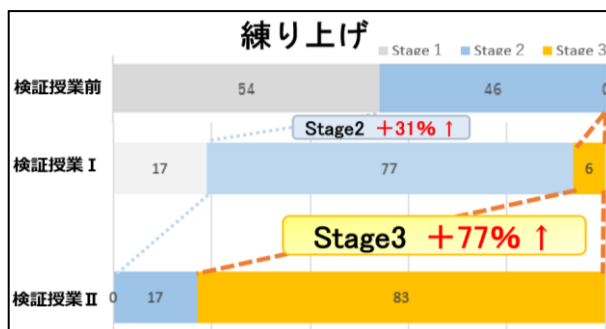
【資料 40：検証授業前と I、II の達成率の変容 (相手意識)】

【資料 40：検証授業前と I、II の達成率の変容 (相手意識)】

研究の有効性を示し、検証授業Ⅱにおいて、3つの全ての観点で Stage3 まで達成した子供が 27/35 人いたことから主張できる。



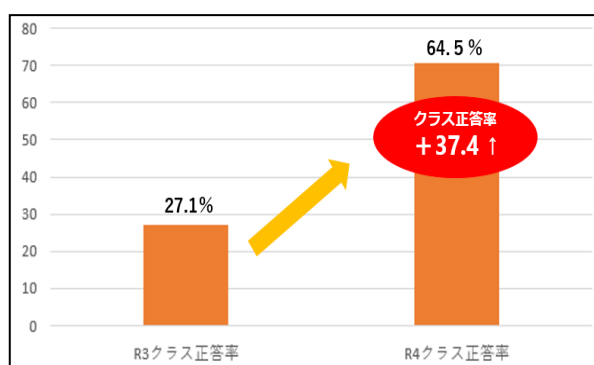
【資料 41: 検証授業前とⅠ,Ⅱの達成率の変容(活用)】



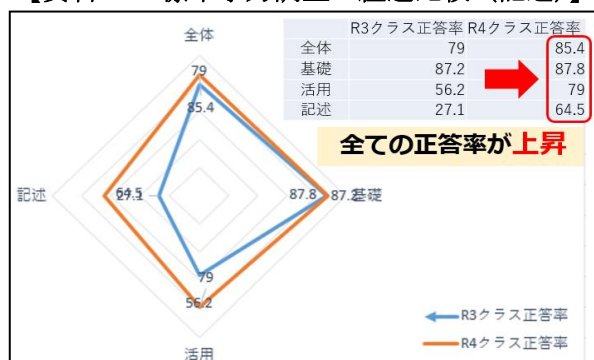
【資料 42: 検証授業前とⅠ,Ⅱの達成率の変容(練り上げ)】

② 標準学力調査における数値的な分析

令和 3, 4 年度標準学力調査(令和 5 年 1 月実施)の「記述」の問題を基に、1 年間の学力の伸びについて、数値的な分析【資料 43】を行った。年度当初の本学級の課題であった、数学的な表現を用いた説明(記述)の改善が、正答率 37.4%の上昇から主張できる。さらに、【資料 44】に示したものは、令和 4 年度標準学力調査(1 月)の詳細結果である。「基礎」の観点では 0.6%の上昇、「活用」では 22.8%の上昇、全体では 6.4%増加という昨年度よりも上回る結果が見受けられる。この正答率の上昇は、「3つの特性を内包した問題設定の工夫」「表現モデルの活用」「段階的な活動設定」の手立てにより、論理的な表現の育成はもちろん、総合的な学力をも高めることができていると言える。



【資料 43: 標準学力調査の経過比較(記述)】



【資料 44: 標準学力調査の経過比較(基礎・活用)】

これらの標準学力調査の分析結果から、年度当初の本学級の課題が改善されたことともに、省察化を促すコミュニケーション活動の工夫が、総合的な学力の定着と、令和 3 年度全国学力・学習状況調査の結果から読み取れた福岡県の小中の課題「数学的な表現を用いた説明」を解決するための授業改善の手立ての一つに成り得ることが主張できる。

③ 研究の具体的な構想(省察化を促す数学的コミュニケーション活動の工夫)の有効性について

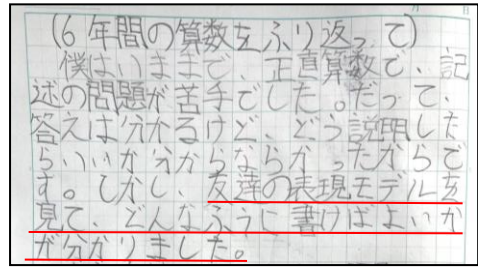
ア 3つの特性を内包した問題設定の有効性

問題設定において重視したことは、①自分の考えを他者に納得させる目的を持たせ、双方向の関わり合いの中で、さらに数学的な表現の練り上げを誘発すること②学習問題の着眼点を類似させることで省察化を促すこと③小中の接続を意識した、論理的な表現に必要な統合的な考えの積み重ねを図ることの、3点である。このことにより、既習事項との類似性に着目して、自分の考えを類推的に推論し、そのことを記述で論理的に表現していく姿や、問題の条件を変

えても自分の考えを図と式，言葉を関連付けて表現していこうとする姿が見られた。

イ 表現モデルの活用の有効性

表現モデルの活用において重視したことは，図と式，言葉を関連付けた表現を表現モデルとして，活用させたり，表現モデルのよさを友達と関わらせたりすることで，子供たちの省察化を促していくことである。さらに，検証授業Ⅰの課題を踏まえ，検証授業Ⅱでは，



【資料 45：子供が書いた6年間の振り返り】

観点を示した表現モデルのよさを全体で交流する場を設けたり，表現を精選する時間を十分に確保したりすることで，他者を納得させる簡潔・明瞭な表現への練り上げを図ることにした。表現モデルの活用の有効性については，【資料 45】のような，「友達の表現モデルを見て，どのように記述すればよいか分かった。」「表現モデルのように，図と式，言葉を関連付けると説明がしやすいことがわかった。」といった子供の記述が多かったことから明らかである。

ウ 段階的な活動設定の有効性

段階的な活動設定で重視したことは，学習過程において，「考えを整理・共有する活動」「表現のよさや改善の方向を見出す活動」「表現を洗練する活動」を段階的に位置づけたことである。このことにより，子供たちは主体的にお互いの数学的な表現を読解したり，解釈したりすることができ，友達の関連付けた数学的な表現を取り入れようとする姿勢を育むことができた。

以上のことから，第6学年の算数科学習指導において，「3つの特性を内包した問題設定の工夫」「表現モデルの活用」「省察の機能を促す活動設定」の3つの工夫を行った「省察化を促す数学的コミュニケーション活動」を位置づけた授業展開を行えば，論理的に表現し，数学への素地を培う子供を育てることができると結論付けることにする。

8 成果と課題

(1) 成果

- 3つの特性を内包した問題設定により，小中の接続を意識した統合的な考えの積み重ねを図ることができ，「論理的に表現し，数学への素地を培った子供」の姿が多く見られた。
- 3つの特性を内包した問題設定と，段階的な活動設定の連動により，自分の考えを表現したり，他者の考えを読解・解釈したりする相互作用が働き，自分の表現の不十分さを改善する省察の機能が促進され，論理的な表現の育成に繋がった。
- 段階的な活動設定と，表現モデルの活用により，相互作用を伴った「省察化を促す数学的コミュニケーション活動」が活発になり，相手意識のある簡潔・明瞭・的確な表現への練り上げができた。

(2) 今後の課題

- この研究で培った論理的な表現のよさを，実感させる具体的な手立ての工夫。

〈参考文献〉

- 『算数型 PISA 型学力の教材開発&授業』(2008)，中原忠男，明治図書
『令和の日本型学校教育の構築を目指して』(2021)，中央教育審議会
『平成 29 年小学校学習指導要領解説算数科編』(2017)，文部科学省，日本文教
『平成 29 年中学校学習指導要領解説数学科編』(2017)，文部科学省，日本文教
『構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり』(1999)，中原忠男編，東洋館出版社
『数学教育における表現力の育成方法に関する研究』(2013)，大橋健司
『数学的コミュニケーションを展開する授業構成原理』(2014)，金本良通，教育出版
『算数・数学科における「説明・証明」の能力に関する研究』(2021)，近藤裕
『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて(報告)』(2016)，教育課程部会
『数学的コミュニケーションの定義と意義に関する基礎的研究』(2017)，村上兼人
『令和3年度全国学力・学習状況調査 福岡県学力調査 調査結果報告書』(2022)
『数学教育における論証の理解とその学習指導』(2017)，國宗進，東洋館出版社
『子どもたちの相互作用で活用する力を高める算数科学習指導』(2014) 山口寿穂
『算数・数学科小中連携の新しい図形指導』(2022)，國宗進 水谷尚人 山崎浩二，明治図書
『ピアジェの教育学-子供の活動と教師の役割-』(2005)，ジャンピアジェ，三和書籍